

덧셈을 이용한 가분수와 대분수의 도입 방안 탐색

장 혜 원*

*서울교육대학교 교수

A Study on the Method of Introducing Improper Fractions and Mixed Numbers Using Additions

Chang, Hyewon *

*Professor, Seoul National University of Education, South Korea, hwchang@snue.ac.kr

초록. 분수의 역사 발생적 관점이나 학습 심리적 관점에서 볼 때, 진분수가 자연스럽고 가분수와 대분수는 진분수와 대비되어 확장된다는 의미에서 이차적 개념이므로 학습상 어려움을 내포하고 있다. 본 연구에서는 가분수와 대분수를 학생들에게 의미 있게 지도하는 대안적 방법을 구안하는 것을 목적으로 한다. 이를 위해 선행연구 및 초등학교 수학 교과서 분석을 통해 지도 시기와 순서, 정의, 분수 덧셈과의 연계 측면에서 몇 가지 비판적 검토를 실시하였다. 특히 학생들에게 1보다 작은 양의 표현을 위해 사용되던 분수가 1 이상의 범위로 확장되어 가분수를 도입하는 맥락의 제공이 미흡하고, 대분수를 자연수와 진분수의 합으로 명확히 정의하지 않는 경우 모호함과 후속 전개의 불편함이 있는 것으로 나타났다. 이에 기초하여, 가분수와 대분수를 도입하기 위해 분수의 덧셈을 이용하는 대안을 제안한다. 이때 측정분수 개념을 기초로 한 진분수의 덧셈은 가분수의 필요성을 함의하는 수학 내적 맥락으로서 역할하며, 대분수는 (자연수)+(진분수)의 맥락에서 명시적으로 정의된다. 대안의 타당성을 확보하기 위한 수학교육적 근거로서 지도 시기, 정의 방법, 분수와 분수 덧셈의 통합, 효과적인 교수 표현 등에 대한 교수학적 논의를 포함하였다.

핵심어: 가분수, 대분수, 분수의 덧셈, 필요성, 수학 내적 맥락

ABSTRACT. Whereas proper fractions are natural for young learners from the perspectives of histo-genetics or learning psychology, improper fractions or mixed numbers imply some learning difficulty due to their property of second concepts as they are extended from proper fractions. This study aims to propose an alternative method for teaching improper fractions and mixed numbers meaningfully. Henceforth, critical review was implemented about the teaching period, their definition, and relation to the addition of proper fractions through longitudinal and latitudinal analyses of elementary mathematics textbooks in Korea and some other countries. The results showed that the context of introducing fractions equal to or larger than 1 is especially unsatisfactory. Based on the results, an alternative method for introducing or defining improper fractions and mixed numbers using the addition of proper fractions or the addition of a natural number and a proper fraction has been proposed. To secure the validity of the method, several didactical discussions about the teaching period, method of definition, integration of fractions and their additions, and effective instructional representations have been included in the study.

KEY WORDS: improper fractions, mixed numbers, the addition of fractions, necessity, internal mathematical context

I. 서론

초등학교 수학에서 다루는 수의 범위는 자연수, 분수, 소수이다. 그러나 엄밀히 말하면 분수와 소수는 수의 범위라기보다 수의 표현 방법이라 일컫는 것이 적절하다. 수의 범위로는 자연수로부터 시작하여 0과 양의 유리수까지 다루게 되며, 이에 대한 표현으로서 소수와 함께 다루어지는 것이 분수이다. 두 표현 중 분수를 소수보다 먼저 다루는 보통의 지도 순서는 역사발생적 측면에서 자연스럽고, 소수는 십진 분수라고 명명할 정도로(Stevin, 1585) 십진체계 내에서 큰수를 무한히 확장하듯이 작은 수를 표현하고자 하는 특정 유형의 분수라고 할 수 있다. 이렇듯 상용수 체계가 십진체계라는 이유에서, 자연수의 일상적 사용과 달리 분수는 그 발생적 우위에도 불구하고 일상에서의 사용이 매우 제한적이다. 이와 같은 일상적 사용의 부족은 수의 확장 자체에서 비롯되는 개념적 어려움과 함께 초등학교의 분수 학습시 어려움을 유발하는 요인일 수 있다.

본 연구에서 관심을 두는 분수는 가분수와 대분수이다. 분수가 학교 수학에서 처음 도입되는 시기에 그 의미는 전체-부분의 등분할분수이고, 진분수의 범위를 벗어나지 않는다. 그러나 이전까지 분수라고 부르던 것을 이제 진분수라는 상세화된 명칭으로 불러야 하는 이유는 가분수는 새로운 유형의 분수가 도입되기 때문이다. 분수 도입 시 등분할분수의 의미를 생각한다면 학생들에게 가분수는 분수의 범주에 포함시키기 거부할 정도의 수학적 대상이다. 실제로 가분수에 대한 학생들의 부자연스러운 심상을 다룬 연구가 다수 있다(Kallai & Tzelgov, 2009; Mack, 1990 등).

오늘날 학생들이 지닌 직관적인 비형식적 지

식과 정의 및 형식적 기호를 갖춘 형식적 지식의 간격에 비추어 수학 교수·학습의 출발점으로서 비형식적 지식의 중요성이 주목된다. 비형식적 지식은 학생들이 친숙한 실생활의 상황 맥락 문제를 해결하고자 할 때 관여하게 된다(Mack, 1990). 한편 분수는 실생활에서 사용 빈도가 적고 가분수와 대분수는 더욱 그러하므로 그와 관련한 비형식적 지식이 충분하지 않다는 점에서 학생들에게 가분수와 대분수의 개념을 지도하는 바람직한 방법에 대해 탐색할 필요성이 야기된다. 가분수와 대분수 같은 분수의 유형을 도입하기 위해 학생들에게 자연스런 맥락과 방법은 무엇인가?

이에 본 연구는 학교 수학에서 가분수와 대분수를 의미 있게 도입하는 맥락과 방법에 대한 탐색을 목적으로 한다. 이를 위해 선행연구 분석 및 해당 개념을 다루는 교과서의 종적, 횡적 분석을 토대로 가분수와 대분수가 도입되는 시기와 방법에 대해 비판적 관점에서 고찰한다. 그 결과를 토대로 가분수가 필요한 수학 내적 맥락의 제공을 위해, 대분수의 정의 도입을 위해 분수의 덧셈을 이용함으로써 개선 가능성을 검토하고자 한다.

II. 이론적 고찰

1. 가분수와 대분수 개념

표준국어대사전에서는 가분수를 ‘분자가 분모와 같거나 분모보다 큰 분수. $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$ 따위이다’로, 대분수를 ‘정수와 진분수의 합으로 이루어진 수. $2\frac{1}{4}$, $5\frac{2}{3}$ 따위를 이른다’로 설명한다(National Institute of Korean Language, 2019). 즉

가분수는 분자와 분모의 크기 비교를 통해, 대분수는 정수와 진분수의 합으로 설명한다. 이렇듯 수학적 용어에 대한 국어사전의 정의는 학교 수학의 정의와 유사하지만, 후자에서 합을 이용한 정의의 명확성은 현행 교과서와의 차이로 확인된다.

수학적 관점에서 분수의 종류는 진분수와 가분수 또는 대분수이다. 1보다 작은 분수와 1 이상의 분수인데, 후자가 가분수 또는 대분수로 표현되는 것이므로 자연수의 분수꼴을 제외한다면 가분수와 대분수는 개념이 아닌 표현상의 구분이며 따라서 양자의 상호 변환 방법은 하나의 학습 요소가 된다. 이에 중학교에서는 1 이상의 분수를 대분수가 아닌 가분수로 나타낸다. 초등 학교에서는 반대로 가분수는 계산 과정에서만 사용할 뿐 결과로서의 수는 대분수로 나타낸다는 차이가 있고, 그 이유로 양의 크기에 대한 명확한 인식을 들 수 있다.

예를 들어 Mack(1995)에 따르면, 진분수에서 분모는 전체를 분할한 부분의 수로 옳게 생각하는 반면 분자를 전체의 수로 생각하는 오개념을 지닌 학생에게 대분수 $w\frac{m}{n}$ 을 이용하여 w 가 전체의 수, $\frac{m}{n}$ 이 전체의 부분을 나타낸다고 설명함으로써 오류 수정을 도울 수 있었다.

이와 같이, 1보다 큰 분수를 나타낼 때 등분할 분수의 의미로는 대분수가 자연스러운 반면 가분수는 그렇지 못하며, 가분수를 위해 자연스러운 것은 단위분수의 몇 개로 간주하는 측정분수의 의미이다. 대표적인 경우로, 수의 본성을 양의 측정으로 간주하는 McLellan & Dewey(1896)는 분수가 자연수와 본질적으로 다를 바가 없으며 특히 분수를 진분수, 가분수 등으로 범주화하는 것에 관한 끝없는 논쟁은 고정 단위에 기초

한 수의 본질에 대한 오해에서 비롯된다고 하였다. ‘측정 단위를 반복하여 어떤 양과 같게 만드는 것’이라는 수의 개념에 따르면, 예컨대 $\frac{4}{3}$ 가 $\frac{1}{3}$ 이 4개인 수라는 것은 4가 1이 4개인 수라는 것과 동일시된다. 더욱이 분수는 표기법을 통해 실제 측정 과정을 더 명시적으로 나타낸다고 하였다. 분수 표기법은 분자를 통해 양 전체에 포함된 측정 단위의 수뿐만 아니라 분모를 통해 단위 자체를 명시적으로 보여주기 때문에, 분수 자체가 전체를 똑같은 부분들로 만들고 그 부분들로 전체를 재구성하는 분석-종합의 과정을 본질적으로 내포한다는 것이다.

그러나 이 자연스러움은 수학적 관점에서의 자연스러움이다. 학생의 이해를 고려한 심리학적 관점에서 본다면, 이 경우에도 여전히 부자연스러움이 남아 있다. 전체보다 작은 부분을 나타내기 위해 등장한 분수가 왜 1보다 커지는지에 대한 역설이다. 그래서 가분수를 배우고 나면 그 전까지 분수라고 불렀던 1보다 작은 분수를 이제 가분수와 대비시켜 진분수(眞分數)라고 칭한다. 한자어에서 보듯이 진짜 분수라는 의미다. 또한 분수는 엄연히 자연수와 다르게 생겼고 연산 방법도 다른데, 자연수도 분수가 될 수 있다는 사실이 학생에게는 자연스럽지 않다.

대분수와 가분수 이해의 어려움을 밝힌 연구 중 Bature & Cooper(1999)는 6, 8학년 학생들에게 대분수와 가분수를 수직선에 위치시키는 과제를 통해 학생들의 이해를 파악하고자 하였다. 연구 결과, 가분수에서 특히 오답률이 높았는데, 그 원인을 전체와 부분의 혼동에서 찾았다. Brown & Quinn(2006)에서는 대수 수업을 듣는 143명의 9~10학년 학생 중 58%가 $5\frac{2}{7}$ 를 합으로

나타내라는 문제에 답하지 못하거나 오답을 하였다. 이 결과는 대분수 표현의 의미를 이해하지 못하고 있음을 보여준다.

학생들이 분수 개념을 이해하기 어려워하는 이유를 대부분 자연수와 대비되는 분수 자체의 특성이나 양의 표현과 관련된 인지 또는 지도법에서 찾는다. 특히 Ni & Zhou(2005)는 어려움의 원인을 기호 표현과 더불어 수학 교육과정에서 찾고자 하였다. 분수는 대개 자연수 지도가 완성된 다음에 도입되는데, 이러한 순서가 자연수 위주의 사고로 편향시켜 분수 관련 상황에서도 온전한 단위를 세어내려는 경향이 있어 장애가 된다는 것이다.

분수를 처음 도입하는 맥락이 전체(1)의 부분을 나타내는 것임을 생각한다면 분수는 1보다 작은 양을 나타내기 위한 수 표현이라는 개념 이미지를 갖는 것은 자연스럽다. 실제로 학생들은 ‘분수는 전체의 부분이고, 따라서 분수는 항상 1보다 작다’는 개념 이미지를 지닌다(Mack, 1990). Kallai & Tzelgov(2009)가 가분수와 그보다 작은 자연수 중 더 작은 수를 선택하는 실험에서 피험자들이 가분수를 택하는 현상을 설명하기 위해 사용한 ‘일반화된 분수’라는 용어를 ‘분수는 1보다 작다’로 정의한 것 역시 같은 맥락이다. 그러한 관점에서 본다면 1 이상의 분수인 가분수와 대분수는 학생들이 갖는 분수의 개념 이미지와 상충하는 요소가 있는 것이 분명하다.

2. 가분수와 대분수 지도 관련 선행연구 분석

학교 수학에서 가분수나 대분수를 지도하는 방법에 대해 비판적 입장을 취하여 대안을 제안한 선행연구가 있다(Jeong, 2009; Kang, 2014; Lee, 2016; Ni & Zhou, 2005 등).

첫째, 형식적 사고를 통한 지도이다. Kang (2014)은 기존 교과서에서 가분수나 대분수가 진분수 개념과 연결되는 충분한 사전 활동 없이 도입되고 있음을 비판하였다. 가분수나 대분수가 구체물 조작에 의해서는 의미 있는 개념 형성이 어려운, 이차적 사고 또는 형식적 사고를 통해 지도될 수 있는 개념이라는 점에 근거하였다. ‘전체를 4개로 나눈 것 중 3개가 $\frac{3}{4}$ → 3개는 4개의 $\frac{3}{4}$ → 3은 4의 $\frac{3}{4}$ 이라는 사고 형식의 형성 → 5는 4의 $\frac{5}{4}$ ’와 같은 방식의 지도이다. 한편

대분수에 대해 ‘1과 $\frac{1}{4}$ ’에서 ‘과’의 의미의 모호함을 지적하면서 합 또는 더하기의 의미를 명확히 다루어야 함을 언급하였다.

둘째, 분수 모델의 활용이다. Lee(2016)는 분수 모델을 이용하면 분수 학습 초기부터 대분수의 도입이 가능하다고 주장하였다. 구체물로 2개와 $\frac{1}{4}$ 을 보이고 그에 대해 약속한 기호 $2\frac{1}{4}$ 로 지도하는 것이다. 이렇듯 분수 모델을 이용한 대분수의 개념적 이해를 선호하는 근거로 대분수도 분수의 한 종류라는 점, 분수의 개념과 연산을 별도의 단원으로 구분하여 지도하는 우리나라 상황에 적합하다는 점을 들었다. 더불어 Lee(2018)는 국내외 교과서 사례를 통해 가분수와 대분수의 변환에서도 알고리즘 외에 분수 모델을 사용한 이해를 강조하였다.

셋째, 분수를 처음부터 측정분수 개념으로 도입한다. Jeong(2009)은 분수를 측정 맥락에서 다루는 이점을 주장하는데, 측정 결과를 나타내기 위해 고안된 분수의 역사적 발생에 근거하여 주어진 분수를 측정분수로 해석하는 것이 등분할 분수보다 후속 학습을 하는 데 도움이 된다는

것이다. 그중 하나가 가분수의 학습인데, 진분수든 가분수든 n 개의 단위분수로 설명할 수 있기 때문이다.

Mclellan & Dewey(1896)는 수의 본질을 측정으로 간주하기 때문에 분수 역시 측정 개념으로 접근하며, 특히 분수를 측정으로서의 해석이 자연수보다 더 자연스럽게 맞아떨어지는 수로 보았다. 그들은 분수를 여러 유형으로 범주화하는 것 자체가 수의 본질을 잘못 파악하고 있기 때문으로 보고, 분수의 측정 기능을 잘 이해하면 새로울 것이 전혀 없다고 하였다. 고정 단위에 대한 관념이 오개념을 야기하며 적절히 정의된 단위, 즉 $\frac{1}{3}$ 과 같은 단위가 같은 종류의 양에 1, 2, 3, ..., n 번 포함되는 것은 수의 본질이며 그로부터 $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$ 역시 자연스럽게다는 것이다.

Ni & Zhou(2005) 역시 전체를 10등분하여 한 부분은 $\frac{1}{10}$ 로, 전체는 부분의 10번 반복으로 이해하도록 하는 부분-전체 관계로서 분수를 생각하는 학생들의 스킴은 $\frac{11}{10}$ 과 같은 가분수 이해를 어렵게 하므로 대안으로 측정 접근을 제안한다. 부분-전체 관계로부터, 남은 부분을 측정하는 과제에서 측정 단위인 부분과 측정되는 양인 전체 사이의 불변 관계에 대한 인식으로 전환하는 측정 접근의 교육적 위력을 주장한다.

이상과 같이 연구자들 사이에서도 여러 대안이 확인되어 가분수와 대분수의 바람직한 지도 방법에 대한 합의는 없는 것으로 파악된다. 연구자에 따라 선호하는 방법이 다르지만, 각각이 지지하는 공통된 생각은 분수 본연의 정의와 연계되어야 하고 이후 분수의 덧셈이나 가분수와 대분수의 상호 변환 등에 영향을 미치므로 신중하게 선택될 필요가 있다는 것이다.

III. 연구 방법

1. 분석 대상

본 연구는 현행 교과서에서 가분수와 대분수를 도입하는 방법에 대한 비판적 검토와 대안 마련을 주요 내용으로 하므로, 우리나라 역대 교육과정기의 교과서와 외국 교과서를 비교, 분석하여 근거로 삼고자 한다.

따라서 가분수와 대분수를 다루는 우리나라 역대 교과서(Ministry of Education, 1962, 1963, 1971, 1973, 1975, 1986, 1990, 1999, 2015, 2018; Ministry of Education and Human Resources Development, 2008; Ministry of Education, Science, and Technology, 2010)와 외국 교과서 5종을 분석 대상으로 하였다. 외국 교과서로는 우리나라와 근접해있어 역사적으로 유사 문화권에 있는 일본(藤井齊亮 et al., 2018)과 중국(人民教育出版社 果程教材研究所, 2016), 그리고 국제학업성취도평가에서 우수한 성적을 보인 싱가포르(Kheong, Soon, & Ramakrishnan, 2018)와 핀란드(WSOY, 2019a, 2019b), 끝으로, 현실 맥락에서 분수의 사용이 미흡함(Clements & Del Campo, 1990)을 고려하여 실생활 맥락을 중시한 미국의 Everyday Math(Bell, Bell, & Bretzlauf et al., 2007)를 선정하였다.

2. 분석 방법

본 연구는 선행연구와 마찬가지로 가분수와 대분수 지도 방법에 대해 비판적 관점을 취하므로 대안을 제시하기 위해 근거로 삼을 면밀한 교과서 분석을 주요 연구 방법으로 한다. Schubring(1987)은 역사적 교과서 분석 방법에 대

해 말하면서 교과서 분석에서 중요한 패턴 중 하나를 초보화의 과정(process of elementarization)으로 보았다. 이는 지식으로부터 지도 가능한 지식 및 관련된 교수 방법으로서의 교수학적 변환을 일컫는다. 본 연구에서도 교과서 분석, 특히 종적 분석을 위해 가분수와 대분수 지식 자체의 변화뿐만 아니라 지식이 어떻게 지도되도록 의도하고 있는지를 파악할 수 있도록 다음과 같은 5가지 측면에서 분석을 실시하였다.

- 지도 시기
- 가분수의 정의
- 대분수의 정의
- 여러 가지 분수의 정의 순서
- 분수 덧셈과의 연계

한편 횡적 분석과 관련하여, 외국 교과서 분석에 대해 Kang(2004)은 우리나라 교과서의 분수 지도 방법의 교수학적 정교함의 수준이 매우 분석적이고 학생 중심적이라서 더 분석적인 논의를 위한 근거로서의 사례를 찾지 못하기 때문에 회의적인 입장이었다. 본 횡적 분석의 의도는 국내의 교과서의 정교한 구성의 수준에 따른 우위 판단이 아니라 가분수와 대분수 도입의 전반적인 방법을 비교하는 것이다. 다만 횡적 분석의 경우, 국가에 따라 전개 방식이나 교육관 및 수学家가 달라 기준별 비교는 교수학적 변환의 맥락을 드러내지 못하고 분절적 결과를 얻게 될 우려가 있다. 따라서 국가별로 전체적인 전개 방식을 분석한 다음, 정리하는 차원에서 종적 분석의 기준을 중심으로 비교할 것이다.

IV. 연구 결과

1. 대분수와 가분수 지도의 종적 분석

대분수와 가분수가 역대 교육과정기의 초등학교 수학 교과서에서 언제, 어떻게 다루어졌는지 살펴볼 필요가 있다.

가. 지도 시기

가분수와 대분수의 지도 시기는 Table 1에서 보는 바와 같이 5학년에서 3학년까지 점차 이른 시기로 내려왔음을 알 수 있다. 5학년에서 정의되던 1, 2차 교과서¹⁾에 조차 정의 이전에 이미 사용된 점을 감안한다면 대체로 4학년에서 지도되던 것이 2009 개정 교과서부터 3학년 2학기로 앞당겨졌다고 할 수 있다.

Table 1. Teaching periods - longitudinal analysis

	1차	2차	3차	4차	5차	6차	7차	2007 개정	2009 개정	2015 개정
3-2									△○	○
4-1			△○	△○	△○	○	○			
4-2	△	△								
5-1	○	○								

○: 정의 시기, △: 정의 없이 사용

이와 같은 정의 시기와 별도로, 본 연구에서 흥미롭게 생각하는 것은 많은 교과서에서 정의 이전에 이미 사용한다는 점이다. 1차 교과서는 5-1-12)의 정의 전에 4-2-4에서 측정분수를 통해 가분수와 대분수를 다룬다. Figure 1처럼 사과 1쪽이 1개의 $\frac{1}{4}$ 인데, 5쪽이면 $\frac{1}{4}$ 이 5이므로 $\frac{5}{4}$ 라고 할 수 있고, '1개와 $\frac{1}{4}$ '과 같아서 $\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$ 이라

1) 각 교육과정에 따른 교과서를 편의상 n 차, 2007 개정, 2009 개정, 2015 개정 교과서로 칭한다.

2) 교과서의 학년-학기-단원을 지칭하기 위해 사용할 것이다. 5-1-1은 5학년 1학기 1단원을 의미한다.

하여 용어만 없을 뿐 개념을 지도한다.

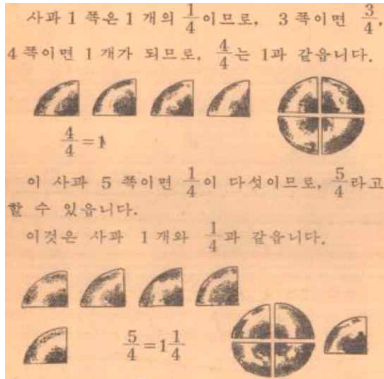


Figure 1. 1st textbook 4-2-4 (Ministry of Education, 1963, p. 112)

2차 교과서에서도 5-1-5의 정의에 앞서 4-2-5에 분모가 같은 분수들의 크기를 다루면서 Figure 2와 같이 가분수가 등장한다. 분모가 같은 분수를 수직선의 위치에 따라 배열하여 크기 관계를 직관적으로 파악하도록 하면서 암묵적으로 측정분수의 개념을 이용한다. 그러나 분자가 분모보다 커지는 지점에 대한 별도의 설명이나 주의 집중은 없다. 명시적으로 개념을 설명한 1차 교과서에 비해 약화된 형태이며 교수 표현에도 차이가 있다. 구체물을 이용한 이산 모델이 아닌 연속 모델로 표현한 것이다.

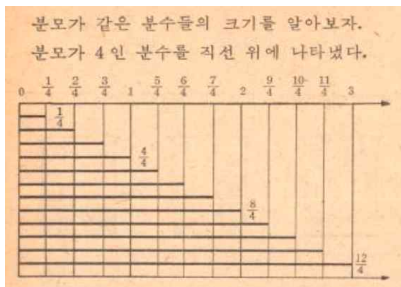


Figure 2. 2nd textbook 4-2-5 (Ministry of Education, 1971, p. 98)

3차 교과서에서도 4-1-5의 용어를 정의하기 전에 ‘ $\frac{1}{5}$ 이 6이면 $\frac{6}{5}$ 이므로’와 같이 측정분수로서 가분수를 다루며, 4-6차, 2009 개정 교과서에서도 수직선에 분수의 위치를 나타내는 활동에서 가분수가 정의 전에 등장한다. 모두 단위분수가 몇 개 또는 몇 배인 측정분수 개념을 파악하도록 하는 의도로 해석되지만, 정의 이전에 대상이 등장하는 것은 비논리적 전개의 한계를 지니는 것이 분명하다.

나. 가분수의 정의

가분수의 정의는 대응하는 개념인 진분수와 항상 함께 제시되어왔다. 가분수와 진분수의 정의는 모든 교육과정기에 걸쳐 분자와 분모의 크기 비교로 이루어진다는 점에서 같다. 다만 그 정의를 유도하기 위한 과정에서 차이가 발견된다.

예를 들어, 3차 교과서는 4-1-5에서 분모가 같은 분수의 배열에서 분자와 분모의 크기를 비교하게 하여 분자가 분모보다 작은, 같은, 큰 경우를 분류한 다음, Figure 3과 같이 가분수를 정의한다. 4-6차 교과서도 유사한 방식을 취한다.

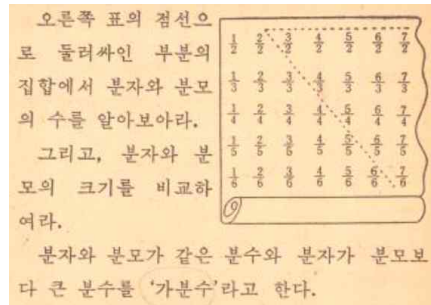


Figure 3. 3rd textbook 4-1-5 (Ministry of Education, 1975, p. 113)

7차, 2009 개정과 2015 개정 교과서는 동일 차시 또는 앞선 차시에서 측정분수의 개념을 다루

기는 하지만 정의 자체에는 반영하지 않고, 분자와 분모의 크기에 따라 진분수와 가분수를 정의한다. 이에 비해 2007 개정 교과서는 정의 문장 내에 단위분수를 이용한 측정분수의 의미를 강조하는 특징을 띤다(Figure 4).

$\frac{1}{4}$ 짜리 4 개를 $\frac{4}{4}$, $\frac{1}{4}$ 짜리 5 개를 $\frac{5}{4}$ 로 나타내고, $\frac{4}{4}$ 나 $\frac{5}{4}$ 와 같이 분자가 분모와 같거나 분모보다 큰 분수를 가분수라고 합니다.

Figure 4. 2007 revised textbook 4-1-6 (Ministry of Education, Science, and Technology, 2010, p. 96)

다. 대분수의 정의

가분수의 정의가 분자와 분모의 크기 비교라는 점에서 일관된 반면, 대분수의 정의 방법은 네 가지로 구별할 수 있다.

첫째, 1, 2차 교과서와 같이 ‘자연수와 분수와 합쳐서 표시된 분수’라고 하여 표현의 관점을 명료하게 보여준다. 그러나 Figure 5에서 확인되듯이 2차 교과서에서는 ‘합쳐서’의 의미가 합, 즉 덧셈의 의미임을 예시를 통해 분명히 알 수 있다. 다만 대분수의 정의가 진분수보다 앞서기 때문에 자연수와 진분수의 합이 아니라 단지 분수이다. 한편 1차 교과서의 경우, 5-1-1의 정의에서는 덧셈식으로 나타내지 않지만, 이후 5-1-5에서 ‘ $1\frac{2}{6}$ 는 $1 + \frac{2}{6}$ 와 같습니다’라고 부연 설명한다는 차이가 있다.

분수에서 자연수와 분수와 합쳐서 표시된 분수를 “대분수”라고 한다. $4 + \frac{3}{4}$ 을 대분수로 표시하면 $4\frac{3}{4}$ 이다. 이것을 “4와 $\frac{3}{4}$ ”이라고 읽는다. 또, $\frac{1}{4}$ 과 같이 분자가 분모보다 작은 분수를 “진분수”라고 한다. $\frac{2}{2}$ 와 같이 분자가 분모와 같거나, $\frac{7}{5}$ 과 같이 분자가 분모보다 큰 분수를 “가분수”라고 한다.

Figure 5. 2nd textbook 5-1-5 (Ministry of Education, 1973, p. 77)

둘째, 가분수를 자연수와 진분수의 합으로 나타냄으로써 대분수를 정의한다. 3차 교과서의 경우이다. 1보다 큰 가분수를 이용하여 얼마만큼 더 큰지를 수직선 상에서 파악하도록 하여 가분수를 자연수와 진분수의 합으로 나타내고 그에 대한 표현으로서 대분수를 도입한다(Figure 6). 4~6차 교과서에서도 3차 교과서의 정의 진술 중 ‘가분수를’이라는 표현은 생략되어 있지만, 도입 맥락에서 가분수를 예로 들어 자연수와 진분수의 덧셈식으로 표현함으로써 그 합으로 나타낸 분수임을 명시한다.

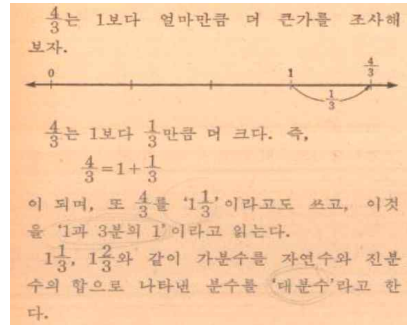


Figure 6. 3rd textbook 4-1-5 (Ministry of Education, 1975, p. 114)

셋째, 가분수를 이용하지 않고 곧바로 ‘ $1 + \frac{1}{4}$ 을 $1\frac{1}{4}$ 로 쓴다’면서 자연수와 진분수로 이루어진 분수로 정의한다. 2009 개정 교과서가 이에 해당한다. 수학적으로 명료한 정의이지만, 도입 맥락이 생략되어 있다는 점에서 학생들에게 부담이 될 가능성이 있다.

넷째, 덧셈식 없이 ‘1과 $\frac{1}{4}$ 을 $1\frac{1}{4}$ 로 쓴다’로 도입하여, 덧셈식 표현을 제공한 앞선 세 방법과 구별된다. 7차, 2007 개정, 2015 개정 교과서가 이에 해당하는데, 이때, ‘과’라는 접속사의 모호

합에 대해서는 이미 설명한 바 있다(Kang, 2014). 더욱이 7차 교과서에서는 자연수와 진분수로 이루어진 분수라는 내포적 성질 없이 ‘ $2\frac{1}{4}$ 과 같은 분수’라는 하나의 사례에 의존한 예시적 정의를 사용하므로 학생들에게 일반화의 어려움을 야기할 가능성이 있다.

라. 여러 가지 분수의 정의 순서

분석 대상인 우리나라 교과서는 모두 분수의 종류로서 진분수, 가분수, 대분수를 이어서, 또는 한꺼번에, 심지어 하나의 문단 내에서 다루었다. 그러나 그것이 소개되는 순서에는 다소간 차이가 있다.

1, 2차 교과서는 대분수-진분수-가분수 순이다. 대분수를 진분수나 가분수보다 먼저 정의하기 때문에 용어 정의에서 제약이 있다. 가분수 도입 전의 모든 분수가 진분수이므로 대분수를 정의할 때 진분수라는 용어 없이 단지 분수라고 표현하는 것으로 충분하다. 그러나 앞서 고찰하였듯이, 1, 2차 교과서에서 정의 이전에 가분수가 이미 사용된 점을 고려하면 단순히 분수라고 표현한 것은 엄밀하지 못한 정의라 할 수 있다.

3차 이후로는 진분수-가분수-대분수 순이다. 다만 앞서 보았듯이 6차까지는 대분수를 정의하기 위해 가분수를 이용하기 때문에 필연적으로 가분수가 대분수보다 앞선 정의되어야 하는 반면, 7차 이후로는 가분수와 연계 없이 대분수를 정의하기 때문에 집필자의 임의적인 선택의 결과라고 할 수 있다.

마. 분수 덧셈과의 연계

3) 2차(5-1-5), 7차(4-1-7) 교과서는 분수 단원에서 분수 덧셈의 일부를 다루지만, 합이 가분수인 진분수의 덧셈은 다음 학기에 지도되는 것으로 확인된다.

3차, 2009 개정 교과서를 제외한 교과서는 가분수를 도입하고 나서 다음 학기에 또는 심지어 다음 학년에 합이 가분수인 진분수의 덧셈을 지도하는 것으로 나타난다³⁾. 현행 교과서인 2015 개정 교과서가 3학년에 가분수를 도입하고 다음 해인 4학년에 진분수의 덧셈을 지도하는 경우이다. 이러한 시기적 간격은 대분수를 덧셈식 표현을 써서 자연수와 진분수의 합으로 정의한 경우에도 마찬가지이다. 수 개념과 연산이 통상적으로 분리되어 지도되는 경향이 반영된 결과라고 볼 수 있다.

분수와 연산을 통합하여 단원을 구성한 2009 개정 교과서의 경우, 3-2-4에서 진분수와 가분수, 진분수의 합과 차, 대분수의 순서로 차시를 구성하면서 합이 가분수가 되는 진분수의 덧셈을 다룬다는 점에서 교과서 집필자가 가분수의 도입 필요가 합이 1보다 큰 진분수의 합 때문임을 의식한 것으로 추측된다. 그러나 개념 정의 이후에 나오므로 학생들이 도입의 필요성을 경험하도록 하지는 못하며, 7차 이후 사라졌던(Table 1 참고) 가분수를 정의 전에 사용하는 현상이 분수를 수직선에 나타내는 활동(Figure 7)에서 다시 나타났음을 보여준다. 1보다 큰 분수를 학생의 의식으로 가져오지 못한 상태에서 등장한 가분수가 유발할 수 있는 암묵적인 인지적 갈등을 해결해야 하는 문제가 남는다.

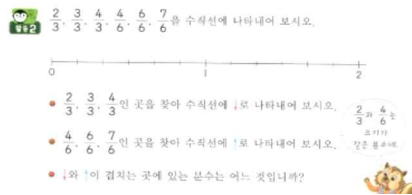


Figure 7. 2009 revised textbook 3-2-4 (Ministry of Education, 2015, p. 113)

2. 대분수와 가분수 지도의 횡적 분석4)

분석 대상인 5개국의 지도 시기는 대부분 4학년인데, 핀란드가 3학년부터 지도하고, 유일하게 중국이 5학년에서 지도하는 것으로 파악된다 (Table 2).

Table 2. Teaching period - latitudinal analysis

	미국	싱가포르	일본	중국	핀란드
3-2					○
4-1	○				
4-2		○	○		○
5-1					
5-2				○	

싱가포르는 4-2-8 분수 단원에서 ‘자연수와 분수를 더할 때 대분수를 얻는다’, ‘가분수는 1과 같거나 1보다 크다’로 설명한다(Figure 8). 이를 위한 시각적 표현으로 대분수는 이산 모델을, 가분수는 연속 모델을 사용하여 적절한 선택으로 판단된다. 분수의 덧셈은 이어지는 별도의 단원에서 다루어진다.

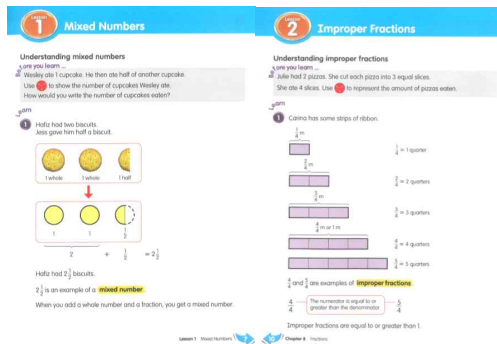


Figure 8. Textbook of Singapore 4-2-8 (Kheong, Soon, & Ramakrishnan, 2018, p. 7, 10)

일본은 4-2-13에서 분수의 표현 방법으로서 진분수, 가분수, 대분수의 차례로 정의한다. 진분수와 가분수는 분자와 분모의 크기 비교로, 대분수는 정수와 진분수의 합으로 정의한다. 진분수와 가분수의 정의에 이어 곧바로 1과의 크기 비교를 제시하고, 가분수로부터 대분수를 유도하며 생각 풍선에 $1 + \frac{2}{3} = 1\frac{2}{3}$ 를 제시함으로써 대분수의 의미를 명확하게 보여준다(Figure 9). 한편 가분수 정의 후 같은 단원에서 합이 가분수인 진분수의 덧셈을 다룬다.

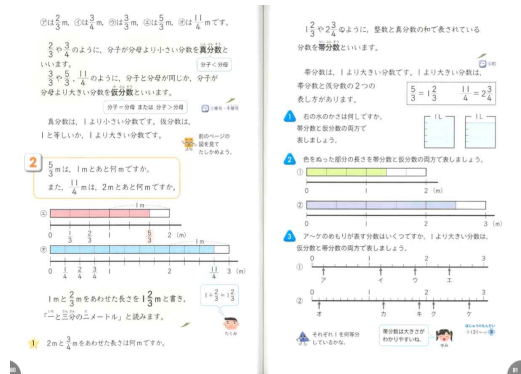


Figure 9. Textbook of Japan 4-2-13 (藤井齊亮 et al., 2018, pp. 80-81)

중국은 분석 대상 중 유일하게 5-2-4에 가분수와 대분수를 다루는 국가이다. Figure 10과 같이 진분수, 가분수, 대분수의 차례로 다룬 것이나 정의 내용과 정의에 이어 1과 크기 비교를 한 것이나 대분수를 가분수로부터 자연수보다 분수만큼 더 많은 수의 표현으로 다룬다는 점에서 일본과 같다. 그러나 가분수를 위한 시각적 표현에는 차이가 있어 연속 모델을 사용한 일본과

4) 외국은 우리나라와 달리 국정 교과서가 아니므로 분석 대상으로 삼은 교과서를 명시해서 표현하는 것이 바람직하지만, 편의상 각국의 명칭으로 지칭하였다. 상세 도서는 III장 1절의 분석 대상 및 참고문헌에서 확인할 수 있다.

달리, 중국은 이산 모델을 사용한다. 분수 도입 시 사용한 등분할분수를 유지하기 위한 접근으로 해석되지만, 가분수에 대한 모델 적합성 면에서 재고의 여지가 있다. 또한 이산 모델인 원 그림 아래의 묶음 괄호가 의미하는 바와 관련하여, 묶음 전체를 1로 간주할 오해의 소지가 있음에도 주의해야 할 것이다.

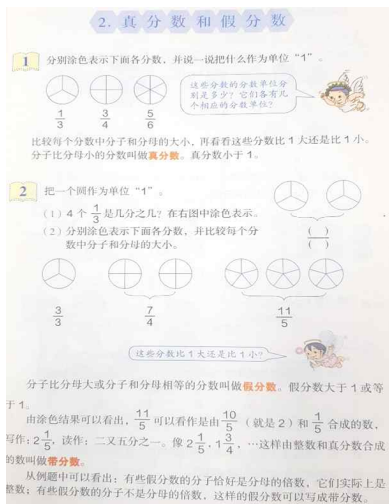


Figure 10. Textbook of China 5-2-4 (人民教育出版社 果程教材研究所, 2016, p. 53)

미국은 4학년에서 다루는데, 대분수, 가분수, 진분수의 순서가 특이하다. 대분수는 3개의 예와 함께 자연수 부분과 분수 부분으로 이루어져 그 합과 같은 것으로, 가분수는 대분수로부터 자연수 부분을 분수 부분으로 쪼개어 나타낸 다른 이름으로 도입한다. $4\frac{3}{8} = \frac{8}{8} + \frac{8}{8} + \frac{8}{8} + \frac{3}{8} = \frac{35}{8}$ 와 같은 방식이다. 1보다 크거나 같은 분수라고 정의한 다음, 분자와 분모의 크기 비교를 추가한다. 그다음 진분수를 설명한다(Figure 11).

Mixed Numbers

Numbers like $1\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{5}$, and $4\frac{2}{3}$ are called **mixed numbers**. A mixed number has a whole-number part and a fraction part. In the mixed number $2\frac{3}{5}$, the whole-number part is 2 and the fraction part is $\frac{3}{5}$. A mixed number is equal to the sum of the whole-number part and the fraction part: $2\frac{3}{5} = 2 + \frac{3}{5}$. Mixed numbers are used in many of the same ways that fractions are used.

Mixed numbers can be renamed as fractions. For example, if a circle is the ONE, then $2\frac{3}{5}$ names 2 whole circles and $\frac{3}{5}$ of another circle.

If you divide the 2 whole circles into fifths, then you can see that $2\frac{3}{5} = \frac{13}{5}$.

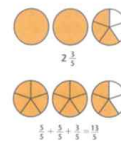
To rename a mixed number as a fraction, first rename 1 as a fraction with the same denominator as the fraction part. Then add all of the fractions.

For example, to rename $4\frac{2}{3}$ as a fraction, first rename 1 as $\frac{3}{3}$.

Then $4\frac{2}{3} = \frac{12}{3} + \frac{2}{3} = \frac{12}{3} + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$.

Fractions like $\frac{13}{5}$ and $\frac{14}{3}$ are called **improper fractions**. An improper fraction is a fraction that is greater than or equal to 1. In an improper fraction, the numerator is greater than or equal to the denominator.

A **proper fraction** is a fraction that is less than 1. In a proper fraction, the numerator is less than the denominator.



Note
Even though they are called improper, there is nothing wrong about improper fractions. Do not avoid them.

Figure 11. Textbook of USA (Bell, Bell, & Bretzlauf et al., 2007, p. 48)

핀란드는 3-2-2 분수와 소수 단원에서 분수를 도입한 다음, 자연수를 분수로 나타냄으로써 알고 있는 자연수와 새로 도입한 분수를 연계하려는 의도를 보인다. 이어 분수의 크기를 비교하면서 진분수를 정의하는데, 막상 가분수는 다루지 않는다(Figure 12). 진분수를 정의한 까닭이 가분수와 대비가 아닌 끝이어서 등장하는 대분수를 정의하기 위한 것으로 해석된다. ‘자연수와 진분수가 함께 있는 것’이라는 정의는 덧셈식으로 접근하지 않을 뿐만 아니라 의미 자체가 모호하다. 4-2-2 분수 단원(WSOY, 2019b)에서는 분수와 대분수를 복습하고 나서 가분수에 대한 별도의 정의 없이 대분수와 가분수의 변환을 다룬 후 이어 여러 분수의 덧셈으로 이어진다. 분수와 덧셈이 한 단원 내에서 다루어지기는 하지만, 분수 도입과 관련된 맥락으로 역할하는 것은 아니다.

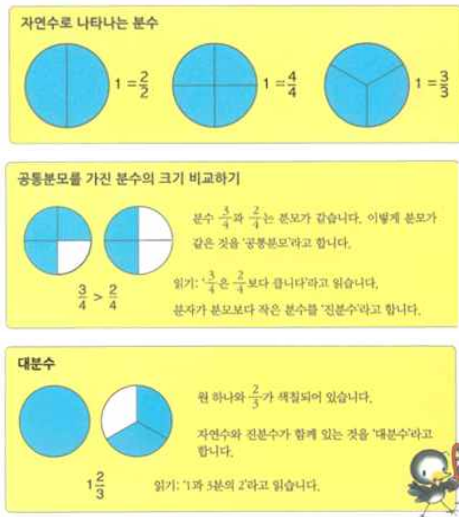


Figure 12. Textbook of Finland 3-2-2 (WSOY, 2019a, p. 38, 42, 44)

요컨대, 일본과 중국은 우리나라 현행 교과서와 유사하다. 다만 가분수로부터 대분수를 도입하고, 1과의 크기 비교가 함께 지도된다는 특징이 있다. 싱가포르와 미국은 대분수를 가분수보다 먼저 다루고, 가분수를 1과의 크기 비교로 정의한다. 특히 미국은 가분수로부터 대분수를 도입하는 일본이나 중국과 반대로 대분수의 변형으로 가분수를 도입한다. 대분수에 대해서는 핀란드를 제외하면 모두 합의 의미와 덧셈식을 이용한다. 일본은 분수와 덧셈을 동일 단원에서 다루지만, 가분수가 필요한 맥락은 볼 수 없다.

3. 가분수와 대분수 도입에 대한 비판적 고찰

앞선 종적, 횡적 분석을 통해 현행 2015 개정 교과서의 가분수와 대분수 도입에 대한 비판적 검토 결과를 다음과 같이 정리할 수 있다.

첫째, 가분수나 대분수의 지도 시기가 너무 이

르다. 종적 분석 결과, 5학년에서 점차 앞당겨져 3학년까지 이르렀고, 외국의 사례에도 핀란드를 제외하면 모두 4학년 이후이다. 학생들이 보이는 가분수와 대분수 이해에 대한 어려움을 감안하면 시기를 좀 더 늦출 것을 고려해야 한다.

둘째, 가분수나 대분수의 필요성을 경험할 수 있는 도입 맥락이 빈약하다. 이는 종적, 횡적 분석 결과에서도 마찬가지다. 도입 상황에서 똑같이 나눈 사과 조각 ‘ $\frac{1}{4}$ 개씩 5개가 필요하다’는 표현은 가분수 개념이 필요한 진정한 상황이라고 보기 어렵다. 다수의 분수 상황이 그러하듯이 실생활에서 사용하지 않는 인위적인 상황이다. 분수의 도입이 1보다 작은 양을 나타내기 위한 수 표현이라는 필요성에 근거한다면 1보다 큰 양을 나타내는 데 왜 분수가 이용되는지에 대한 맥락이 있어야 할 것이다.

셋째, 정의로 인한 심리적 오류 가능성이 있다. 3차 교과서와 같이 가분수를 규칙성의 맥락에서 정의하는 경우는 말할 것도 없고, 측정분수로 접근할지라도 가분수의 정의 자체는 분자와 분모의 크기 비교로 이루어지므로 1과의 크기 비교에 대한 의식을 다루지 못한다. 그 결과 분수가 1보다 커지는 상황을 당면할 때 경험할 인지적 갈등을 해결함으로써 얻을 수 있는 의미 있는 이해를 보장하지 못한다. 가분수를 1과의 크기 비교로 정의하는 싱가포르, 미국이나 적어도 분자, 분모의 크기 비교 정의 후 1과의 크기 비교가 뒤따르는 일본, 중국과 대조적이다.

넷째, 가분수를 대분수보다 먼저 다루는 것이 효과적인지 검토할 필요가 있다. 앞선 분석에서 싱가포르와 미국은 대분수를 먼저 도입하지만, 그 외 국가와 우리나라의 3차 이후의 교과서는 가분수 다음에 대분수를 지도하는 순서였다. 실제로 Kang(2014)은 진분수의 합이 가분수가 되

고 이를 통해 대분수꼴을 도입하는 것이 수학적 으로 정직한 방법이라고 하였다. 그러나 아동의 심리적 특성, 생활 중심 전개를 특징으로 하는 1, 2차 교육과정기를 고려한다면 대분수를 가분 수보다 먼저 지도하는 것에 대한 근거를 생각해 볼 수 있다. 1보다 큰 분수를 나타내는 데 가분 수와 대분수 중 어느 것이 더 자연스러운지 재 고해보고자 하는 것이다.

다섯째, 정의의 모호함으로 인한 수학적 오류 가능성이 있다. 2015 개정뿐만 아니라 7차, 2007 개정, 핀란드 교과서에서 취한 대분수의 정의에 는 자연수와 진분수의 합이라는 명시적 의미가 결여되어 있다. 자연수‘와’ 진분수라는 정의에는 합의 의미가 없고, 실제로 (자연수)-(진분수)가 별도의 차시로 다루어진 반면 (자연수)+(진분수) 의 내용은 없는 실정이다. ‘과/와’같은 언어적 연 결사가 수학적 의미의 덧셈을 직접 의미한다고 보기 어려움이 지적되었다(Kang, 2014). 따라서 대분수와 가분수의 변환에서도 덧셈식으로 표현 하지 못하고 이산 모델을 이용하여 자연수에 해 당하는 전체 만큼에 부분을 나타내기 위한 점선 표시의 제공 여부에 따라 대분수 또는 가분수로 나타내도록 하는 것이다(Ministry of Education, 2018, p. 87 참고).

V. 결론- 가분수와 대분수의 도입을 위한 대안

본 연구의 목적은 가분수와 대분수 도입의 기 존 접근 방식에 대해 비판적으로 고찰하고 대안 을 제시하는 것이다. IV장의 분석 결과에 기초한 대안으로서 가분수와 대분수가 왜 필요한지 도 입을 위한 맥락과 명확한 정의를 제공하기 위해

분수의 종류를 별도로 다루는 차시 없이 분수의 덧셈을 다루는 단원 중 일부 차시에서 대분수와 가분수를 도입하는 Table 3과 같은 구성을 제안 한다.

Table 3. Alternative steps for introducing improper fractions and mixed numbers

단계	내용	예
1	합이 1보다 작은 진분수의 덧셈	$\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ 을 다루며, 이때 용어 는 진분수가 아닌 분수를 사용함
2	날개와 그 부 분이 있는 상 황에서 (자연 수)+(분수)로 정 대분수를 정의	날개(1)보다 부분($\frac{3}{5}$)만큼 많은 양 을 나타내기 위해 $1 + \frac{3}{5} = 1\frac{3}{5}$ 으로 대분수를 정의함
3	합이 1 이상 인 진분수의 덧셈에서 가분수를 정의	$\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = 1\frac{1}{5}$ 이 각각 3개, 4개이므 로 합하면 7개, 즉 $\frac{7}{5}$ 이 되고, 이 양이 1보다 커짐을 의식하도록 하여 가분수를 정의함. 합이 $\frac{n}{n}$ 꼴이 되는 덧셈식을 통해 자연수의 분 수꼴을 포함하여 다음으로써 가분 수인 합을 대분수로 변환하도록 함. 또한 가분수와 대비하여 용어 진분수를 도입함.

이 대안의 기본 방향은 대분수와 가분수를 분 수의 종류 차시에서 진분수와 함께 선언적으로 정의하는 것이 아니라 가분수를 진분수 덧셈의 결과로 도입함으로써 필요성을 포함한 도입 맥 락 부재의 문제점을 해결하고, 대분수를 자연수 와 진분수의 덧셈으로 정의함으로써 수학적 의 미를 명확히 하는 것이다. 이를 위해 ‘수’와 ‘연 산’을 분리해서 구성한다는 생각을 벗어나야 하 며, 새로운 분수 개념이 필요한 맥락으로서 덧셈 이라는 수학 내적 맥락의 활용 가능성에 초점을 둔다. 이를 적용할 경우, 분수의 덧셈은 현재도 4학년 2학기에서 지도되고 있으므로 역대 우리 나라 교육과정이나 외국에 비해 지도 시기가 너

무 이르다는 문제도 자연스럽게 해결할 수 있다. 대안적 방법의 특징은 현행 교과서와 비교하여 Table 4와 같이 정리할 수 있다.

Table 4. Comparison between the current and the alternative

현행	대안
분수와 분수 덧셈의 분리	분수와 분수 덧셈의 통합
가분수→대분수	대분수→가분수
(자연수)+(진분수)를 다루지 않음, '과/와'를 이용한 대분수 정의	(자연수)+(진분수)의 맥락에서 대분수 정의
가분수의 도입 맥락(필요성)이 없음	진분수의 덧셈을 수학 내적 맥락(필요성)으로 하는 가분수 도입
분자와 분모의 크기 비교 통한 가분수 정의	1과 크기 비교 통한 가분수 정의

첫째, 분수와 분수 덧셈을 다루는 단원의 분리 대 통합의 문제이다. Lee(2016)가 분수 모델의 활용이 수와 연산을 분리하여 다루는 우리나라 교과서에 적합하다고 했을 만큼 우리나라 교과서에서는 줄곧 수와 연산을 구별하여 다룬 것으로 확인된다. 가분수나 대분수의 경우도 마찬가지로, 분수의 종류 차시에서 가분수, 진분수, 대분수를 다룬 다음 진분수의 덧셈은 연산 단원 또는 차시에서 별도로 다루어졌다. 그 분리의 타당성은 확인하기 어렵다. Kang(2014)은 분수 개념 학습을 위한 세부 활동 중 한 범주를 분수의 종류 지도라고 하였고, 그 안에 진분수, 가분수, 대분수의 분수 종류와 동분모 분수의 합과 차가 함께 포함되어 있다고 하였다. 이는 본 대안에서 수와 연산의 통합에 기초한 대분수와 가분수 도입을 뒷받침해준다. 물론 대분수는 굳이 덧셈을 이용하지 않고 자연수 낱개보다 부분만큼 더 많은 양을 나타내는 의미와 기호로 도입이 가능하지만, 합으로 정확한 수학적 의미를 부여하지 못

한 모호함은 이후 학습에서 불필요한 걸림돌이 된다. 본 연구의 대안과 같이 자연수와 진분수의 덧셈, 진분수끼리의 덧셈을 이용하여 대분수와 가분수를 도입하기 위해서는 분수와 분수 덧셈을 통합하여 다룰 필요가 있다.

둘째, 대분수를 가분수보다 앞서 지도하는 것을 검토할 필요가 있다. 대분수와 가분수는 상호 변환 가능한 수의 표현에 따른 구분이다. 따라서 어느 것을 먼저 지도하는가는 관점에 따라 달라질 수 있다. Kang(2014)은 대분수가 등장하기 위해서는 진분수의 합이 가분수가 되는 과정 $\frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$ 에 대한 이해를 통해 대분수 $\frac{4}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{4}$ 을 도입하는 것이 수학적으로 정직한 방법이라고 하였다. 이와 같이 수학적으로 선호되는 방법과 달리 IV장 3절에서 설명했듯이 1, 2차 교육과정기에 대분수를 가분수보다 먼저 지도한 것은 1보다 큰 분수가 학생에게 어색하다는 심리적 이유와 낱개 외의 나머지 부분을 표현하기 위해 발생했다는 분수 개념의 역사 발생적 이유를 들 수 있다. 사실 아동에게 가분수는 매우 어색하다. 분수는 말 그대로 1보다 작은 양을 나타내기 위해 발생한 수이기 때문이다. 따라서 학습 심리적 측면에서 본다면 1보다 큰 분수는 가분수가 아니라 대분수의 의미가 더 자연스럽다고 할 수 있다. $\frac{1}{4}$ 조각이 7개 있다는 진술보다 온전한 낱개 1개가 있고 그 나머지 부분은 1개가 안 되니까 분수를 이용해야 할 필요성이 분수의 역사적 발생 맥락이기도 하다. 따라서 1개와 $\frac{1}{4}$ 조각이 3개 더 있으니 $1 + \frac{3}{4}$ 이고, 이를 $1\frac{3}{4}$ 으로 나타내면 분수 부분은 여전히 1보다 작다. 요컨대 학습 심리적으로나 역사 발생적으로는 대분수를 가분수보다 먼저 도입하는 것이 더

자연스러운 것이다. 더욱이 결괏값을 가분수가 아닌 대분수로 나타내는 초등학교 수학의 특성상, 이후 가분수 도입시 진분수의 합으로 나온 가분수를 앞서 배운 대분수로 변환하는 전개에도 무리가 없다. 다만 가분수가 도입되기까지 대분수를 구성하는 진분수의 명칭은 1, 2차 교과서처럼 그냥 분수이다.

셋째, 분수의 덧셈이 가분수의 도입을 위한 수학 내적 맥락으로 역할한다. 대분수는 낱개와 남는 부분에 대한 분수 표현이므로 이때의 분수 부분은 여전히 1보다 작아 심리적으로 선호됨을 이미 언급하였다. 그러나 가분수가 등장하면서 학생들에게 1보다 작은 양, 전체의 부분만큼을 나타내기 위해 사용했던 분수의 사용 맥락이 1 이상인 양을 나타내는 것으로 급변하게 된다. 이와 같은 분수 개념의 변화를 인식하고 수용하도록 돕기 위해 모든 수학적 개념과 마찬가지로 가분수가 왜 필요한지를 보여줄 수 있는 맥락을 제공하는 것은 교수학적으로 의미 있다. 기하 교육의 예를 빌자면, Clairaut(1741)는 학습자에게 가장 자연스런 학습법은 ‘필요’에서 출발하는 것이라고 하였다. 수학적 개념을 도입하기 위해 그 개념의 필요성을 충분히 느낄 수 있는 맥락이 필요한 것이다.

자연수는 관련한 학교 밖 경험 기회가 다수이기 때문에 학교 교육을 강화하는 데 도움이 되는 반면, 분수는 학교 안팎의 연계가 쉽지 않다 (Clements & Del Campo, 1990)는 점에서 분수 학습의 어려움이 야기된다. 즉 분수 개념은 일상에서 사용되는 사례를 거의 찾기 어려운, 이후 수학적 발달을 위한 개념이기 때문에 실생활 맥락의 필요성을 경험하기 쉽지 않다. 그래서 가분수가 필요한 수학 내적 맥락으로 분수의 덧셈을 이용하는 것이다. $\frac{7}{5}$ 을 배운 다음 합이 $\frac{7}{5}$ 이 되

는 진분수의 덧셈을 다루는 현행 방식은 Euclid 원론에 대한 대안으로서 논리적 전개의 무미건조함을 견뎌낸 다음에야 비로소 그 적용을 다른 교재를 연상시킨다(Clairaut, 1741). 왜 1보다 큰 분수가 필요한지에 대한 이해 없이 $\frac{7}{5}$ 을 도입한

다음 $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}$ 의 계산 결과로 사용하는 것에 해당하며, 이는 $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}$ 의 결과를 표현할 필요에서 새로운 유형의 분수인 가분수를 도입하는 것과 구별된다.

더욱이 가분수를 진분수의 덧셈을 이용하여 도입하는 것이 타당한 근거 중 하나는, 초등학교 수학에서 가분수는 연산의 대상이나 결과가 아닌 연산 과정 중에 다루어지는 수라는 사실이다. 연산의 대상인 수의 종류로 선언하는 것보다 덧셈 과정에서 출현하는 분수의 새로운 유형으로 다루는 것이 더 자연스럽다고 보는 이유이다.

넷째, 정의 자체에 대한 논의로, 우리나라에서 줄곧 취해온 진분수와 가분수의 정의는 분자와 분모의 크기 비교에 근거한다. 이는 분수가 수의 표기법으로서 의미가 강하다는 점에서 나름대로 의미 있는 접근이라 할 수 있지만, 진분수와 가분수의 구분이 전체 1과의 관계 속에 가능한 것이기 때문에 1과의 크기 비교를 통해 정의하는 것이 개념적으로는 더 의미 있다고 할 수 있다. 대분수와 관계나 변환과 관련해서 더욱 그러하다. 학습자의 관점에서 분자와 분모의 비교를 선호한다면, 적어도 그러한 정의에 이어 곧바로 1과의 크기 비교를 의식하도록 해야 할 것이다.

한편 가분수의 도입을 위해 측정분수 개념이 요구된다. Skemp(1989)가 곱셈을 동수누가가 아닌 두 조각의 결합(product)으로 지도하는 예를 들어 설명했듯이, 나중에 스킴의 재구성성이 없도록 하는 기초 스킴(foundation schemas)의 제공을

고려한다면 처음부터 등분할분수가 아닌 측정분수로 도입할 것을 주장할 수 있다. 그러나 자연수에 익숙한 아동이 분수를 처음 배울 때 경험할 심상 구성의 어려움을 생각한다면 진분수에 대해서는 등분할분수가 쉽고, 따라서 학교 수학에서 그 방법을 선호한다고 보인다. 분수 개념 도입시 부분-전체로서의 등분할분수로 접근한다고 하더라도 단위분수를 배운 다음에는 진분수의 크기를 단위분수의 몇 개로 재확인함으로써 측정분수의 의미를 학습해야 한다. 사실 진분수의 덧셈을 이용한 정의와 무관하게 가분수 자체를 측정분수로 다루는 것의 효과는 이미 주목된 바 있다(Jeong, 2009; Ni & Zhou, 2005; Tzur, 1999 등).

이상과 같은 대분수와 가분수 지도 방안의 타당성에 대한 논의와 더불어, 교과서 분석에서 드러난 대분수와 가분수를 위한 교수 표현에 대해 제언하고자 한다. 대부분의 교과서에서 대분수와 가분수를 위해 상황에 따라 이산 모델과 연속 모델을 혼용하였다. 대분수의 경우, 전체와 부분만큼을 표시해야 하는 상황이므로 등분할분수를 위해 사용한 이산 모델이 여전히 효과적이다. 가분수는 어떠한가? Lee(2016)는 구체적 모델의 사용을 분수 학습 초기의 개념 이해뿐만 아니라 가분수와 대분수의 상호 변환 측면에서도 옹호하였다. 그러나 IV장에서 언급했듯이, 그 변환을 위해서는 전체에 부분을 나타내기 위한 점선 표시라는 교수학적 변인을 이용해야 하고, 전체에 대한 한정을 자의적으로 해석할 위험이 있다. 예컨대 합이 가분수인 덧셈을 두 가지 모델로 표현한 3차 교과서(Figure 13)에서 띠모델 같은 구체물 표현을 이용할 경우 $\frac{4}{7} + \frac{5}{7}$ 를 $\frac{9}{7}$ 가 아니라 $\frac{9}{14}$ 와 같이 전체를 잘못 파악하여 분모와 분자

모두를 각각 더하는 오류를 강화할 위험이 있다. 반면 하단의 수직선 모델은 덧셈의 결과인 가분수를 충실하게 구현하고 있다.

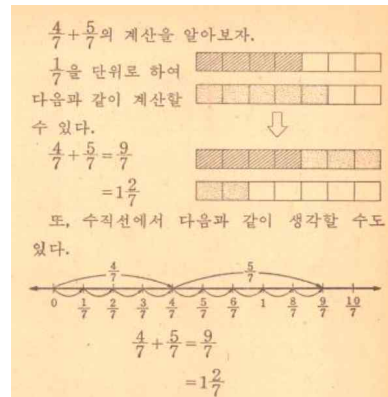


Figure 13. 3rd textbook 4-1-5 (Ministry of Education, 1975, p. 123)

따라서 분수의 덧셈 맥락에서 가분수의 정의 및 가분수와 대분수의 상호관계 파악을 위해 수직선(또는 수직선과 유사한 형태의 연속 모델)의 효과적인 활용을 제안한다. 수직선 모델이 시각적 표현이지만 상징적 요소를 지니기 때문에 학생들에게 어렵다는 연구(Baturo & Cooper, 1999; Bright, Behr, Post, & Wachsmuth, 1988)가 있음에도 불구하고, 그 효과는 실증적 연구(Tzur, 1999 등)에서 이미 확인된 바 있다.

참고문헌

- Baturo, A. R., & Cooper, T. J. (1999). Fractions, reunitisation and the number-line representation. *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 25-30.

- Bell, M., Bell, J., & Bretzlauf, J. et al. (2007). *Everyday mathematics*. Chicago: McGraw-Hill.
- Bright, G. W., Behr, M. J., Post, T. R., & Wachsmuth, I. (1988). Identifying fractions on number lines. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(3), 215-232.
- Brown, G., & Quinn, R. J. (2006). Algebra students' difficulty with fractions: An error analysis. *Australian Mathematics Teacher*, 62(4), 28-40.
- Clairaut, A. A. (1741, ver. 1920). *Eléments de géométrie*. Paris: Gauthier-Villars et Cle.
- Clements, M. A. & Del Campo, G. (1990). How natural is fraction knowledge? In L. P. Steffe, & T. Wood (Eds.). *Transforming children's mathematics education: International perspectives* (pp. 181-188). Hillsdale, NJ: LEA Publishers.
- Jeong, E. (2009). An Comparative analysis of fraction concept in mathematics textbooks of Korea and Singapore. *The Journal of Educational Research in Mathematics*, 19(1), 25-43.
- 정은실(2009). 싱가포르와 우리나라 교과서의 비교 분석을 통한 분수 개념 지도 방안 탐색. *수학교육학연구*, 19(1), 25-43.
- Kallai, A. Y., & Tzelgov, J. (2009). A generalized fraction: an entity smaller than one on the mental number line. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 35(6), 1845-1864.
- Kang, W. (2014). An analysis on concepts and methods of teaching fractions. *The Journal of Educational Research in Mathematics*, 24(3), 467-480.
- 강완(2014). 분수 개념 지도 내용과 방법 분석. *수학교육학연구*, 24(3), 467-480
- Kheong, F. H., Soon, G. K., & Ramakrishnan, C. (2018). *My pals are here, Maths 4B*. Singapore: Marshall Cavendish Education.
- Lee, D. (2016). An analysis on the contents of textbooks about converting between a mixed number and an improper fraction. *Education of Primary School Mathematics*, 19(4), 277-289.
- 이대현(2016). 대분수와 가분수의 상호 변환에 관한 교과서 내용 분석. *초등수학교육*, 19(4), 277-289.
- Lee, D. (2018). A comparative analysis on the fraction contents of Korean, Japanese, Singaporean, American, and Finnish mathematics textbooks. *Education of Primary School Mathematics*, 21(2), 111-130.
- 이대현(2018). 한국, 일본, 싱가포르, 미국, 핀란드의 수학 교과서에 제시된 분수 지도 내용의 비교·분석. *초등수학교육*, 21(2), 111-130.
- Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(1), 16-32.
- Mack, N. K. (1995). Confounding whole-number and fraction concepts when building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(5), 422-441.
- Mclellan, J. A., & Dewey, J. (1896). *The psychology of number and its applications to methods of teaching arithmetic*. New York: D. Appleon and company.
- 장혜원, 임미인, 신새미 역(2020). *수의 심리학과 산술 교수법*. 서울: 교우.
- Ministry of Education (1962; 1973). *Mathematics 5-1*. Seoul: National textbook Co.

- 문교부(1962; 1973). **수학 5-1**. 서울: 국정교과서주식회사.
- Ministry of Education (1963; 1971). *Mathematics 4-2*. Seoul: National textbook Co.
- 문교부(1963; 1971). **수학 4-2**. 서울: 국정교과서주식회사.
- Ministry of Education (1975; 1986; 1990). *Mathematics 4-1*. Seoul: National textbook Co.
- 문교부(1975; 1986; 1990). **수학 4-1**. 서울: 국정교과서주식회사.
- Ministry of Education (1999). *Mathematics 4-1*. Seoul: National textbook Co.
- 교육부(1999). **수학 4-1**. 서울: 국정교과서주식회사.
- Ministry of Education (2015; 2018). *Mathematics 3-2*. Seoul: Chunjae Education.
- 교육부(2015; 2018). **수학 3-2**. 서울: ㈜천재교육.
- Ministry of Education and Human Resources Development (2008). *Mathematics 4-Ga*. Seoul: Doosan.
- 교육인적자원부(2008). **수학 4가**. 서울: ㈜두산.
- Ministry of Education, Science, and Technology (2010). *Mathematics 4-1*. Seoul: Doosan Donga.
- 교육과학기술부(2010). **수학 4-1**. 서울: 두산동아(주).
- National Institute of Korean Language (2019). Standard dictionary of Korean language. 국립국어원(2019). 표준국어대사전. <https://stdict.korean.go.kr/search/searchView.do> (2019. 9. 13.)
- Ni, Y., & Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27-52.
- Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author. *For the Learning of Mathematics*, 7(3), 41-51.
- Skemp, R. R. (1989). *Mathematics in the primary school*. London: Routledge.
- Stevin, S. (1585). *La disme*. Paris: IREM.
- Tzur, R. (1999). An integrated study of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promoting that learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(4), 390-416.
- WSOY (2019a). *LASKUTAITO 3B*. 황윤희, 도영 역(2019). **핀란드 초등 수학 교과서 3-2**. 서울: 솔빛길.
- WSOY (2019b). *LASKUTAITO 4B*. 양재욱, 도영 역(2019). **핀란드 초등 수학 교과서 4-2**. 서울: 솔빛길.
- 藤井齊亮, et al. (2018). **新しい算數 4下**. 東京: 東京書籍.
- 人民教育出版社 果程教材研究所 (2016). **數學 五年 下冊**. 北京: 人民教育出版社.