대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 30 권 제 4 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 30, No. 4, 773 ~ 796. Nov 2020
DOI: https://doi.org/10.29275/jerm.2020.11.30.4.773

초등학교 6학년의 근/원 일반화 문제 해결 과정 분석을 통한 대수적 일반화 가능성 탐구

임 미 인* · 장 혜 원**†
*서울개명초등학교 교사, **서울교육대학교 교수

Investigating the Possibility of Performing Algebraic Generalization Based on the Analysis of Problem Solving on Near/Far Generalization of 6th Graders

Lim, Miin* · Chang, Hyewon†**
**Teacher, Seoul Kaemyong Elementary School, South Korea*, ssbin22@sen.go.kr
***Professor, Seoul National University of Education, South Korea*, hwchang@snue.ac.kr

초록. 초등수학에서 산술을 학습한 학생들은 중학교에 진급하여 본격적으로 대수를 학습하게 되는데, 이때 산술적 사고에서 대수적 사고로의 원만한 전이는 대수 학습의 중요한 성공 요건이다. 이에 본 연구에서는 중학교 진급을 앞둔 6학년 학생 64명을 대상으로 도형 패턴에 관련된 근 일반화와 원 일반화 문제 해결 양상을 분석하였다. 분석 결과, 대수적 일반화를 수행하는 데 어려움을 겪는 다수의 학생 사례가 파악되었으며, 연구 결과에 대한 논의를 통해 초등학생들의 산술적 사고에서 대수적 사고로의 전이를 지원하기 위한 몇 가지 교수학적 시사점을 도출하였다.

핵심어: 산술적 일반화, 대수적 일반화, 근 일반화, 원 일반화, 초기 대수

ABSTRACT. Students who have learned arithmetic in elementary mathematics would learn algebra in middle schools in earnest. So, the transition from arithmetical thinking to algebraic thinking is an important success factor for algebra learning. Therefore, in this study, 64 sixth graders solved the problems of near generalization and far generalization concerning the generalization of some figure patterns. Subsequently we analyzed their problem solving. As a result of the analysis, several cases of students having difficulties in performing algebraic generalization were identified. Through the discussion of the research results, several pedagogical implications were drawn to support the transition from arithmetical thinking to algebraic thinking in elementary school students.

KEY WORDS: arithmetical generalization, algebraic generalization, near generalization, far generalization, early algebra

† corresponding author
Received: Oct 10, 2020 / Reviewed: Nov 13, 2020 / Accepted: Nov 18, 2020

I. 서론

초등수학에서 산술을 학습한 학생들은 중학교에 진급하여 본격적으로 대수를 학습하게 되는데, 이때 대수를 산술의 일반화라고 보는 관점에 기초한다면, 자연스레 산술적 사고에서 대수적 사고로의 이행이 가정된다. 즉 학생들이 성공적으로 대수를 학습하기 위해서는 산술적 사고에서 대수적 사고로의 원만한 전이가 요구되는 것이다. 그렇다면 초등수학에서 산술 학습을 의미충실하게 학습한 학생은 누구든지 대수 내용을 학습함으로써 자연스럽게 대수적 사고를 할 수 있게 되는 것일까?

산술과 대수가 밀접하게 연계되지만 동일하지 않듯이(Kim, 2003), 산술적 사고와 대수적 사고 간에도 차이가 있다. Filloy & Rojano(1989), Herscovics & Linchevski(1994), Kim(1994), Warren (2003) 등 다수의 선행연구에 따르면, 산술적 사고와 대수적 사고 간에는 '교수학적 단절(didactic cut)'이라고 일컫는 간극이 존재한다. 이러한 단절의 존재는 학생들이 산술적 사고에서 대수적 사고로 원만하게 전이하도록 돕기 위해서 둘 사이를 연결하는 적절한 징검다리 학습이 필요함을 함의한다. 그러한 학습이 없다면 학생들은 양자 사이의 단절된 부분 어딘가에서 혼란을 경험하고 이후의 대수 학습에 어려움을 겪게 될 가능성이 크다.

학생들에게 이러한 징검다리 학습을 효과적으로 제공하기 위해서는 먼저 산술적 사고와 대수적 사고의 차이점을 살펴보아야 한다. Kim(2004)에서도 알 수 있듯이 양자 간의 대표적인 차이는 문자 해석, 기호 사용, 식과 동치의 개념, 일반화 등이라 할 수 있다. 예컨대 문자 해석과 관련하여, 어떠한 문자가 있을 때 산술에서는 이것이 보통 축약이나 단위로 사용되는 반면, 대수에서는 변수나 미지수를 대신하여 사용되기 때문에 요구되는 사고도 달라진다. 또 일반화와 관련하여 Choi(2020)는 일반화가 대수적 사고의 본질이며, Kim(2002)은 산술에서 대수로의 비약은 기존의 일반화를 더욱 일반화함으로써 성취된다는, 즉 대수는 사물이 아니라 수의 특정 측면의 추상화와 일반화를 나타낸다고 하였다. 이러한 주장은 일반화의 수준이 상이하여 보다 상위 수준의 일반화가 있음을 말하며, 이는 Krutetškiĭ, Wirszup, & Kilpatrick(1976), Radford(2008), Stacey (1989) 등의 연구에서도 확인된다. Krutetškiĭ et al.(1976)에 의하면 학생마다 수학 내용을 일반화하는 능력이 다르며, Radford(2008)는 일반화를 산술적 일반화와 대수적 일반화로 구분하였고, Stacey(1989)는 근 일반화(near generalization)와 원 일반화(far generalization)로 구분하였다. 또한 학생들이 산술적 사고에서 대수적 사고로 원만하게 이행하도록 돕기 위해서는 낮은 수준의 일반화에서 높은 수준의 일반화로 이행하도록, 즉 산술적 일반화에서 대수적 일반화가 가능하도록 지도해야 하며, 이것이 대수 학습의 성패와 유관함을 알 수 있다.

NCTM(2000)은 학생들의 대수적 사고를 촉진하기 위하여 패턴을 분석, 확장, 일반화하고 표현할 수 있는 기회가 주어져야 한다고 하였다. Ministry of Education(2019b)은 주어진 배열에서 패턴을 찾는 활동이 학생들의 일반화 능력을 신장하는 데 기여한다고 하였으며, Amit & Neria (2008)는 패턴을 일반화하는 활동은 대수를 배우지 않은 학생들에게는 비형식적으로 대수적 기호를 창조하는 맥락을 제공하며, 대수를 이미 배운 학생들에게는 대수적 기호의 유용성을 경험하는 계기를 제공한다고 하였다. 그 밖에 Choi(2020), Watson & Mason(2006) 등 다수의 선행연구에서 패턴의 일반화 활동이 학생들의 대

수적 사고를 촉진하고 지원하는 강력한 도구라고 밝힌 바 있다.

이처럼 일반화는 대수적 사고의 중요한 특성 중 하나이며 패턴의 일반화 활동을 통해서 대수적 사고를 촉진하고 지원할 수 있다. 우리나라의 경우 현행 수학과 교육과정을 살펴보면, 규칙성을 하나의 내용 영역으로 취하여 초등학교 저학년 시기부터 패턴을 찾는 활동을 다루고 있으며, 초등수학 교과서에서는 수의 배열에서뿐만 아니라 도형의 배열에서 패턴을 찾는 활동도 지도하고 있다. 그러나 초등수학을 통해 수와 도형의 배열에서 패턴을 찾는 기초적인 활동을 수행한 학생들이 중학교에 진급하여 대수를 학습하는 과정에서 모두 원만하게 일반화의 사고를 한다고 단정 짓기는 어렵다. 오히려 대수 학습을 어려워하는 수많은 중등학생 사례는 그렇지 않을 가능성을 함의한다. 이는 초등수학에서 산술을 학습한 학생들이 중등수학에서 본격적으로 대수를 학습하기 이전에 산술적 사고에서 대수적 사고로의 전이가 이루어지거나 그 준비가 되었는지 확인할 필요로 이어진다. 이때 본 연구의 관심인 일반화의 사고와 관련하여, 학생들의 대수 학습 준비도를 파악하고 만약 그렇지 못하다면 어떠한 부분에서 지원이 필요한지 면밀히 분석할 필요가 있다.

이에 본 연구에서는 초등학교 저학년 시기부터 간단한 수나 모양의 배열에서 규칙 찾기를 경험했고 4학년 시기에 수와 도형의 배열에서 규칙을 찾아 다섯째, 여섯째로 올 수나 도형 찾기를 학습했던 6학년 학생들이 도형 패턴의 근 일반화와 원 일반화 문제를 해결하는 양상은 어떠한지 분석하였다. 이때 수 패턴이 아닌 도형 패턴을 활용한 것은 도형 패턴이 물리적 구조 안에 일반화를 위한 '시각적' 단서를 내포하고 있기 때문에 패턴을 다양한 방법으로 일반화하는 맥락을 제공할 뿐만 아니라(Bishop, 2000; Lee & Freiman, 2006) 학생들의 일반화에 있어서 다양한 측면을 살펴볼 수 있는 좋은 과제이기 때문이다(Choi, 2020). 따라서 도형 패턴의 일반화와 관련하여 중학교 진급을 앞둔 6학년 학생들의 근 일반화와 원 일반화 문제 해결 양상을 파악하고 학생들이 보이는 산술적 일반화와 대수적 일반화의 특징, 오류 유형 등을 분석하였다. 이러한 분석 결과는 학생들의 대수 학습 준비도를 파악하는 데 중요한 정보를 제공하며, 그에 대한 논의로부터 학생들의 산술적 사고에서 대수적 사고로의 전이에 관한 교수학적 시사점을 도출하는 것을 연구의 목적으로 설정하였다.

II. 이론적 고찰

1. 일반화

일반화는 과학적 지식뿐만 아니라 일상생활의 비과학적 지식의 본질적인 특성 중 하나로, 실세계를 설명하고 이해하는 데 핵심이 되는 요소이다. 또한 수학적 개념, 명제, 증명 등에 수반되며, 수학적 개념의 이해, 문제 해결 등에 사용되는 매우 중요한 수학적 사고이다(Kim, 1997).

Polya(1957)는 일반화를 '하나의 대상에 대한 고찰에서 그 대상을 포함하는 집합의 고찰로 이행하는 것, 또는 제한된 집합에 대한 고찰을 그것을 포함하는 더 큰 집합에서의 고찰로 이행하는 것'이라고 정의하였다. Dreyfus(1991)는 일반화를 '특정 사례들 사이의 공통점을 식별하고 처음에 고려했던 범위를 넘어서서 추론을 확장하는 것'이라고 하였다.

앞서 언급했듯이 일반화는 여러 수준이나 유형으로 구분되는데, Ellis(2007)는 학생들이 일반

화를 시도하는 과정에서 사용하는 정신적 행동의 유형을 관계맺기, 검색하기, 확장하기로 분류하였다. 관계맺기는 두 가지 이상의 상황이나 대상 사이의 관계를 형성하는 것이다. 예를 들어, 두 가지 대상을 개별적인 것으로 인식한 후 둘 사이의 유사 관계, 연관성을 형성하게 되면 이것은 대상 사이의 관계맺기를 한 것이다. 검색하기는 같은 행동을 반복하여 어떠한 유사한 요소를 찾으려고 노력하는 것을 말한다. 비록 수학적으로 자명한 것일지라도 학생들은 동일성에 초점을 맞추고 검색할 수 있다. 마지막으로 학생들이 패턴이나 유사성의 관계를 인식하는 것을 넘어서 그보다 일반적인 구조로 확장해 나가는 행동을 한다면 이는 확장하기에 해당한다. Ellis는 일반화가 관계맺기에서 검색하기, 확장하기로 이동하면서 학생들의 일반화는 더 정교해진다고 주장하였다.

Radford(2008)에 의하면, 일반화는 크게 산술적 일반화(arithmetic generalization)와 대수적 일반화(algebraic generalization)로 구분된다[1]). 산술적 일반화는 국소적으로 패턴의 일부 공통성을 발견하여 산술적인 방법으로 인접한 항을 구하는 것이다. 예를 들어, 성냥개비 패턴에서 재귀적인 규칙을 이용하여 3씩 더하면서 20번째에 위치하는 성냥개비의 개수를 구하는 것이 이에 해당하며, 산술적 일반화를 이용하여 임의의 n번째 항을 표현하는 일반식을 구하지는 못한다. 산술적 일반화는 매우 큰 항이나 임의의 항을 결정하는데 사용될 수 없으며 불확실한 양과 관련된 연상을 수행하지 않는다는 측면에서 대수적이지 않다. 반면 대수적 일반화 수준에서는 궁극적으로 문자와 숫자 등 대수적 기호를 통해 n번째 항을 표현하는 일반식을 구할 수 있게 된다.

Choi(2020)의 연구에 따르면 산술적 일반화에서 대수적 일반화로 넘어가기 위해, 즉 일반화된 산술의 인식을 도와주기 위해 도형 패턴을 이용할 수 있다. 제시된 시각적 표현을 통해 학생들이 패턴의 구조를 보다 용이하게 파악할 수 있을 뿐만 아니라, 도형 패턴의 물리적 구조는 학생들마다 다양한 방식으로 해석될 수 있기 때문이다. 예를 들어 *Figure* 1과 같은 성냥개비 배열에서 n번째 항의 성냥개비 수는 3n+1로 해석될 수 있을 뿐 아니라, 4+3(n-1) 등 다른 방식으로도 해석이 가능하다. 물론 추후 학생들이 대수를 학습하면서 동일한 패턴의 여러 가지 일반화 표현을 비교하면서 대수적으로 동치인 식의 의미, 괄호의 역할, 수와 문자를 곱하는 방법 등을 배우게 되고 결국 성냥개비 수를 가장 간단한 식으로 나타내면 3n+1이 된다는 것을 알게 될 것이다(Watson & Mason, 2006). 그러나 그와 같은 학습이 이루어지기 전에 제시된 패턴의 구조를 파악하여 각자의 방식으로 일반화를 하는 학습이 선행되는 것이 타당할 것이다.

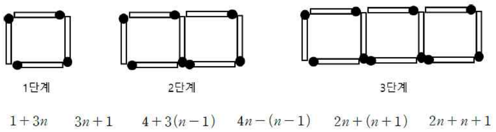

***Figure* 1.** Different ways to interpret matchsticks patterns (Choi, 2020)

Stacey(1989)는 도형 패턴의 일반화 과제를 몸풀기(warm-up), 근 일반화(near generalization), 원

1) Radford(2008)에서는 패턴을 다루는 과제 해결 시 산술적 일반화와 대수적 일반화 이외에 학생들이 사용하는 전략으로서 '소박한 귀납법(naïve inductions)'도 언급하고 있다. 그러나 이는 공통성을 추론하는 것이 아니라 규칙을 추측하고 시행착오의 과정을 통한 개연적 추론에 의존하는 전략이므로, 본 연구에서는 이를 일반화 방법으로 포함하지 않았다.

일반화(far generalization) 문제로 구성하였다. 먼저 몸풀기 문제는 주어진 패턴의 바로 다음 단계나 다다음 단계의 도형의 수를 묻는 것으로, 학생들이 도형 패턴에 익숙해지도록 돕기 위함이다. 근 일반화 문제는 단계적으로 그림을 그리거나 개수를 세어서 해결할 수 있는 것으로, 보통 10단계 또는 20단계에서의 도형의 개수에 대해 묻는다. 원 일반화 문제는 단계별 접근 방법으로 해결하기 어려운 100단계 이상에서의 도형의 개수에 대해 물음으로써 대수적인 일반화를 유도하는 것이다. 여기서 몸풀기 문제와 근 일반화 문제는 산술적 차원의 질문인 반면, 원 일반화 문제는 상대적으로 대수적인 일반화를 요구하는 질문이다.

이때, 근 일반화와 원 일반화를 구분하는 기준은 연구자마다 차이가 있다. 예를 들어 Rivera (2013)의 경우에는 1~9단계까지를 근 일반화로, 10단계 이상을 원 일반화로 구분하였다. 한편 Sasman et al.(1999)는 학생들이 잘못된 일반화 전략에 빠지지 않도록 문제를 세심하게 설계해야 할 필요를 주장하기도 하였다. 예컨대, 5단계, 20단계, 100단계와 같이 배수 관계로 문제를 구성하는 것보다는 19단계, 59단계와 같이 서로 나누어떨어지지 않는 관계로 문제를 구성하는 것이 학생들의 비례 전략의 오류를 방지하는 데 도움이 된다는 것이다.

중학생 이상의 연구 대상의 경우에는 원 일반화 문제를 문자와 기호를 사용하여 대수식으로 표현할 것이 기대된다. 그러나 아직 산술적 일반화 수준의 학생들은 원 일반화 문제 해결 과정에 어려움을 겪을 수 있고, 본격적인 대수 학습 이전인 초등학생들은 그럴 가능성이 크다. 따라서 이와 같은 선행연구 고찰을 통해 도형 패턴의 근 일반화와 원 일반화 문제 해결 시 초등학교 6학년 학생들이 보이는 일반화 양상을 분석하고 그로부터 대수적 일반화의 가능성 및 산술적 사고에서 대수적 사고로의 원만한 전이를 지원하는 교수학적 시사점을 도출할 필요를 파악하였다.

2. 도형 패턴의 일반화 관련 초등수학 교과서 분석

현행 2015 개정 교육과정에 따른 초등수학 교과서에서 구현하고 있는 도형 패턴의 일반화 관련 활동을 분석하였다. 먼저 1학년과 2학년 수학 교과서에서 수나 모양의 패턴에서 규칙을 찾아보는 간단한 활동을 제시함으로써 학생들은 일반화의 기초적인 정신적 행동을 경험하게 된다. 예를 들어, 2학년 2학기 6단원에서는 쌓기나무를 쌓은 모양을 보고 4번째로 올 모양을 쌓기나무로 쌓아보는 활동, 쌓은 규칙을 말해 보는 활동을 제시하고 있는데, 이러한 근 일반화 문제[2] 해결을 통해 학생들이 초보적인 일반화의 사고를 경험할 것이 기대된다(*Figure* 2).

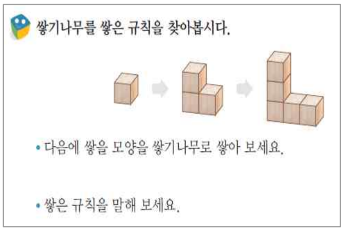

***Figure* 2.** Find pattern in an array of shapes (Ministry of Education, 2020, p. 134)

2) 앞서 살펴보았듯이 연구자마다 근 일반화와 원 일반화에 대해 상이한 분류 기준을 보이는데, 본 연구에서는 Rivera(2013)와 같이 10단계 미만은 근 일반화, 그 이상은 원 일반화로 구분할 것이다. 따라서 교과서에서 다루는 도형 패턴 문제는 Stacey(1989)의 몸풀기 문제에 해당하지만, 본 연구에서는 근 일반화로 간주할 것이다.

4학년 1학기 6단원에서는 수의 배열, 도형의 배열, 계산식에서 규칙 찾기를 학습하게 된다. 이 중에서 *Figure* 3은 수의 배열에서 규칙을 찾아 빈칸에 알맞은 수를 써넣는 활동 사례이다. 학생들은 12에서 시작하여 3씩 곱한 수가 오른쪽에 위치한다는 규칙을 발견하여 6번째에 해당하는 수를 구하게 된다. 이는 산술적 일반화인 수치적 전략으로 근 일반화 문제를 해결하는 것이다.

***Figure* 3.** Find pattern in an array of numbers (Ministry of Education, 2019a, p. 133)

앞서 언급했듯이 도형의 배열에서 규칙을 찾아 일반화하는 활동은 수의 배열과 달리 시각적 표현을 통해 물리적 구조를 파악하는 경험을 제공한다. 교과서에서는 단순히 규칙을 찾는 것을 넘어서 다섯째나 여섯째에 알맞은 모양을 그려보는 등 근 일반화 문제에 관한 다양한 활동이 제시되어 있다(*Figure* 4).

여기서 교과서에서 제시하고 있는 도형 패턴 구조의 다양성에 주목할 필요가 있다. Choi(2020)에 따르면, 도형 패턴의 물리적 구조는 학생들이 패턴을 일반화하는 과정에 많은 영향을 미친다. 왜냐하면, 패턴의 구조에 따라서 시각적인 단서를 제공하는 방식이 달라지고 가능한 일반화 표현의 개수도 달라지기 때문이다.

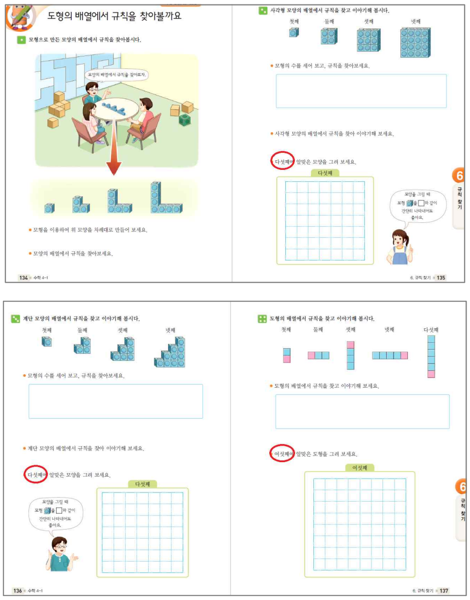

***Figure* 4.** Find patterns in arrays of shapes (Ministry of Education, 2019a, p. 134-137)

일반적으로 도형 패턴은 크게 반복패턴(repeating pattern)과 성장패턴(growing pattern)으로 구분된다. 반복패턴은 특정 반복단위(unit of repeat)를 연결하여 구성하는 패턴을 뜻한다. 예를 들어, *Figure* 5는 반복단위인 십자가 2개를 오른쪽에 한 번 더 이어붙이면 다음 단계가 되기 때문에 반복패턴이라 할 수 있다. 한편, *Figure* 6은 이전 단계에서 다음 단계로 넘어갈 때 일정한 규칙에 따라서 예측가능한 방식으로 성장하지만 어떠한 반복단위가 존재하지 않는다는 점에서 반복패턴과 구별되며, 이를 성장패턴이라고 한다(Billings, 2008; Choi, 2020; Rivera & Becker, 2011; Warren & Cooper, 2008). 현행 초등수학 교과서에서는 저학년 시기에는 주로 반복패턴을 다루고, 4학년 1학기 교과서에서는 성장패턴 위주로 다룬 것을 볼 수 있다.

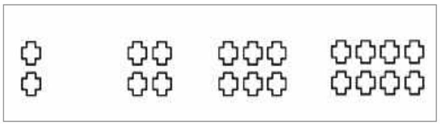

***Figure* 5.** Repeating pattern (Warren & Cooper, 2008)

***Figure* 6.** Growing pattern (Rivera & Becker, 2011)

다음으로, 사례로 제시되는 단계의 수에도 주목할 수 있다. Choi(2020)에 따르면 대부분의 관련 선행연구에서는 도형 패턴의 단계를 순차적으로 3~5개 제시하고 있으며, *Figure* 2, *Figure* 4에서 보는 바와 같이 초등수학 교과서에서도 3~5개의 단계를 제시하고 있다. 이와 관련하여 Choi(2020)는 연구 결과에 기초하여 패턴의 유형과 학생 수준을 고려하여 사례로 제시하는 단계의 수를 결정할 필요가 있다고 주장하였다.

이와 같은 현행 초등수학 교과서 분석 결과에 기초할 때, 우리나라 학생들은 초등수학에서 반복패턴과 성장패턴에 해당하는 도형 패턴을 모두 경험하였고, 제시된 3~5개의 단계를 보고 다음 단계에 해당하는 도형을 찾는 근 일반화 문제를 학습한 것으로 파악된다. 따라서 학생들이 반복패턴과 성장패턴에 해당하는 도형 패턴의 근 일반화뿐만 아니라 원 일반화 문제를 어떻게 수행하는지 구체적인 양상을 분석하는 것은 학생들의 산술적 일반화와 대수적 일반화 수준을 파악하게 하는 필수적인 연구 과제일 것이다.

III. 연구 방법

1. 연구 대상

본 연구의 대상은 S시 소재 A초등학교 6학년 학생 64명이다. A초등학교가 위치한 지역은 교육 여건이 중하 수준에 해당하며, 공교육 이외의 별도 사교육을 받는 학생 비율은 높지 않은 편이다. 연구 대상은 1, 2학년 때 2009 개정 교육과정에 따른 수학교과서로 기초적인 규칙 찾기를 학습했고, 4학년 때는 2015 개정 교육과정에 따른 4학년 1학기 수학교과서를 활용하여 수와 도형의 배열에서 규칙 찾기를 학습하였다. 그 이후에는 학교수학을 통해 도형 배열의 일반화를 특별히 학습하지는 않았으며 산술적 일반화가 가능하다고 가정되는 학생들이다.

2. 검사 문항

4학년 1학기 수학교과서(Ministry of Education, 2019a)와 선행연구 결과에 기초하여 *Figure* 7과 같이 서로 다른 특징으로 대표성을 띠는 4개의 문항으로 검사 문항을 구성하였다. 반복패턴과 성장패턴을 고루 포함하였으며, 각 문항은 3단계 또는 4단계까지의 도형 배열을 제시한 후 7단계와 58단계에 관해 묻는 동일한 방식으로 제시하였다. Rivera(2013), Stacey(1989)에 기초하고 연구 대상이 아직 초등학생이라는 점을 고려하여, 근 일반화에 해당하는 문제로 7단계에서의 도형의 개수를, 원 일반화에 해당하는 문제로 58단계에서의 도형의 개수를 물어 학생들의 구체적인 일반화 양상을 분석하고자 한 것이다. 또한 n^2 유형의 4번 문항은 4학년 1학기 수학교과서에서 동일하게 다룬 유형이므로 간섭효과를 방지하기

위해 순서상 가장 마지막으로 배치하였다. 각 문항별 주요 특징은 다음과 같다.

1번 문항은 원 2개가 반복단위로서 되풀이되는 A, AA, AAA, AAAA, ⋯ 형태의 반복패턴이다. 1단계를 이어 붙여서 다음 단계를 생성할 수 있는데, 이 유형의 패턴은 상대적으로 난이도가 낮아 초등학생을 대상으로 하는 패턴의 일반화 연구에서 흔히 사용된다(Yu & Ryu, 2013). 본 연구에서도 학생들이 도형의 반복패턴을 보고 어떻게 일반화를 하는지 파악하기 위해 이 문항을 포함하였다. 산술적 일반화를 하는 학생들은 원을 2개씩 그리거나 2, 4, 6, 8, 10, 12, ⋯와 같이 그림을 수치화해서 수를 세어 올라가는 방법 등을 통해 해당 단계의 원의 개수를 구할 것이다. 반면 대수적 일반화를 하는 학생들은 '2×n'의 구조를 파악하여 문제를 해결할 것이다.

2번 문항은 A, AB, ABB, ABBB, ⋯ 형태의 패턴으로 성냥개비가 정사각형을 만들면서 성장한다는 특징이 있다. *Figure* 1에서 살펴보았듯이 이 패턴은 1+3n, 4+3(n-1) 등 다양하게 해석될 수 있기 때문에 여러 선행연구에서 이러한 성냥개비 소재 문제를 다루었으며 TIMSS 2003과 TIMSS 2007에서 대수 영역의 추이 문항으로도 사용되었다(Choi, 2020). 학생들은 학교수학에서 이와 동일한 도형 패턴을 일반화하는 경험을 해보지 않았기 때문에 6학년 학생들이 이와 같은 패턴을 보고 근 일반화, 원 일반화 문제를 해결하는 양상을 분석하는 것은 학생들이 대수적 사고로 원만하게 전이하는 것을 지원하는 데 의미있는 시사점을 파악하게 할 것으로 기대하였다. 이 문항을 해결할 때 산술적 일반화를 하는 학생들은 성냥개비 3개로 정사각형을 하나씩 늘려가는 그림을 그리거나 4, 7, 10, 13, 16, ⋯과 같이 그림을 수치화해서 수를 세어 올라가는 방법

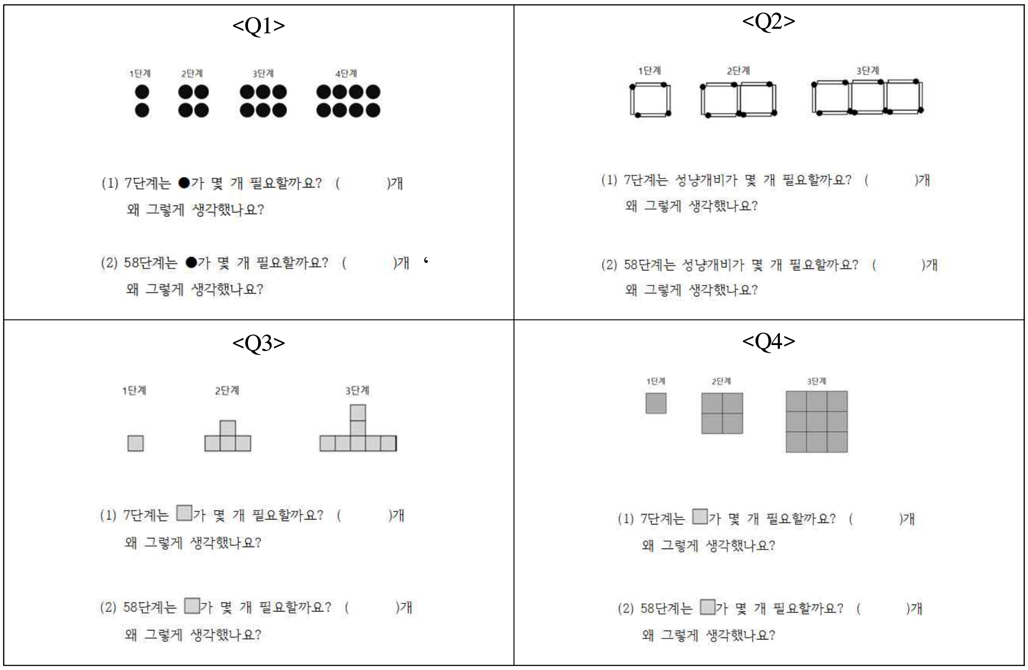

***Figure* 7.** Test items

등을 통해 해당 단계의 성냥개비의 개수를 구할 것이다. 반면 대수적 일반화를 하는 학생들은 '1+3n', '4+3(n-1)' 등으로 구조를 파악하여 문제를 해결할 것이다.

3번 문항은 불변하는 1개의 도형이 중심에 있고 일정한 방향으로 기본도형이 1개씩 늘어나는 성장패턴이다. 이 유형은 n-1단계가 n단계에 포함되기 때문에 단계 사이의 차이를 시각적으로 인식하기 쉽고, 정중앙에 1개의 정사각형이 항상 같은 위치에 있으므로 불변하는 부분도 시각적으로 잘 파악된다. 아랫변이 2씩 성장하는데 좌우 대칭으로 1씩 성장한다는 것도 파악이 용이하고, 성장 부위들이 세 방향으로 1씩 동일하다는 관계를 지니기에 형우수성이 좋은 문항이라 할 수 있다(Choi, 2020). 학생들은 이와 동일하지는 않지만 4학년 때 *Figure* 4의 첫째 활동과 같이 1개로 시작하여 오른쪽과 위쪽으로 각각 1개씩 늘어나는 성장패턴을 경험한 바 있다. 따라서 학생들이 정중앙에 놓인 불변하는 1개의 정사각형을 알맞게 처리하면서 문제를 해결하는지 확인하고자 하였다. 이 문항을 해결할 때 산술적 일반화를 하는 학생들은 사각형을 왼쪽, 오른쪽, 위쪽으로 하나씩 늘려가는 그림을 그리거나 1, 4, 7, 10, 13, …과 같이 그림을 수치화해서 수를 세어 올라가는 방법 등을 통해 해당 단계의 사각형의 개수를 구할 것이다. 반면 대수적 일반화를 하는 학생들은 '3n-2', '1+3(n-1)' 등으로 구조를 파악하여 문제를 해결할 것이다.

4번 문항은 *Figure* 4에서 볼 수 있듯이 4학년 1학기 교과서에서 학습했던 사각수 관련 도형패턴이다. 학생들은 연결큐브를 이용하여 각 단계의 모양을 만들어보면서 가로와 세로가 각각 1개씩 늘어나는 정사각형 모양이라는 패턴을 찾고 5단계에 해당하는 모양을 그림으로 그려보는 활동을 경험하였다(Ministry of Education, 2019b). 따라서 나머지 세 문항에 비해 상대적으로 학생들에게 친숙도가 높은 문항으로, 보다 쉽게 n×n 형태의 구조를 시각적으로 인식한 다음 일반화의 시도가 가능할 것이라 예상하였다. 이 문항을 해결할 때 산술적 일반화를 하는 학생들은 가로와 세로로 사각형을 한 줄씩 늘려가는 그림을 그리거나 1, 4, 9, 16, 25 …와 같이 그림을 수치화해서 수를 세어 올라가는 방법 등을 통해 해당 단계의 사각형의 개수를 구할 것이다. 반면 대수적 일반화를 하는 학생들은 'n×n' 등으로 구조를 파악하여 문제를 해결할 것이다.

3. 자료 수집 및 분석 방법

본 연구의 검사는 2020년 6월 연구 대상 학생들의 등교수업일에 맞추어 이루어졌다. 검사 시간은 1차시에 해당하는 40분을 제공하였고 검사 종료 후 검사지를 회수하여 각 문항별 정오 결과뿐만 아니라 학생들의 일반화 양상, 오류 유형을 분석하였다.

구체적으로, 학생들이 대수 학습을 앞둔 시점에서 네 가지 문항별 근 일반화와 원 일반화 문제를 해결할 때 보이는 일반화 양상은 어떠한지, 오답의 경우에는 어떤 오류 유형을 보이는지 분석하였다. *Figure* 8과 같이 일차적으로 근 일반화 문제를 해결하기 위해서는 규칙을 파악하여 그림을 그리거나(그림 그리기 전략) 수를 세어 진행하는(수치화 전략) 산술적 일반화를 수행할 것이 기대된다. 한편 원 일반화 문제를 해결하기 위해서는 제시된 도형 패턴을 보고 구조를 파악하여 문제를 해결하는 대수적 일반화를 수행할 것으로 기대된다. 그러나 대수적 일반화가 가능한 학생들은 근 일반화 문제도 대수적 일반화로 접근이 가능하며, 아직 산술적 일반화 수준에 머물러 있는 학생들은 원 일반화 문제를 해결하기

위해 산술적 일반화를 시도할 가능성이 있지만 이 경우에는 수행이 어렵고 오류가 예상된다.

학생들의 구체적인 일반화 과정을 파악하기 위해서는 필요시 개별 면담을 실시하는 것이 효과적이지만, Covid-19 감염병에 따른 학교 방역 지침에 의거하여 면담을 실시하지 않고 가급적 학생들이 자신의 문제 해결에 대해 상세히 기록하도록 안내하였다.

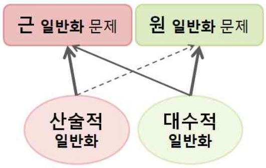

***Figure* 8.** Generalization ways expected that students perform

Ⅳ. 연구 결과

문항별로 정오 결과를 정리하면 *Table* 1과 같다. 첫째 행에는 근 일반화와 원 일반화 문제를 둘 다 옳게 해결한 학생수, 둘째 행은 근 일반화 문제는 옳게 수행하고 원 일반화 문제만 오답한 학생수, 셋째 행은 반대로 원 일반화 문제는 옳게 수행했으나 근 일반화 문제에서 오답한 학생수, 마지막 행은 둘 다 오답한 학생수를 기재한 것이다. 이 장에서는 문항별 정답 학생들의 일반화 양상과 오답 학생들의 오류 유형을 구분하여 학생 반응을 분석할 것이다.

1. 문항별 일반화 양상

가. 1번 문항

원이 2개씩 늘어나는 단순한 반복패턴 구조에 해당하는 1번 문항의 1-(1) 근 일반화와 1-(2) 원 일반화 문제를 둘 다 옳게 해결한 학생은 60명(약 93.7%)이다. 4명을 제외한 학생들이 두 문제 모두에서 정답 반응을 보여 네 문항 중 가장 정답률이 높은 것으로 나타났다. 둘 다 정답을 한 60명의 근 일반화와 원 일반화 문제 해결 양상을 정리하면 *Table* 2와 같다.

***Table* 2.** Results of Q1 (N=60)

	1-(1) 근	1-(2) 원
산술적 일반화	7명	·
대수적 일반화	53명	60명

1-(1)은 근 일반화 문제임에도 불구하고 60명 중 7명만이 그림 그리기(4명), 수치화(3명) 전략의 산술적 일반화로 문제를 해결한 것으로 나타났다. 먼저 그림 그리기 전략을 사용한 학생들은

***Table* 1.** Results of the study (N=64)

	1번		2번		3번		4번	
	근	원	근	원	근	원	근	원
둘 다 정답 학생수(%)	60명(93.7%)		26명(40.6%)		22명(34.4%)		30명(46.9%)	
일부 정답 학생수(%)	3명(1.6%)		13명(20.3%)		22명(34.4%)		14명(21.9%)	
		·		3명(4.7%)		·		1명(1.6%)
둘 다 오답 학생수(%)	1명(4.7%)		22명(34.4%)		20명(31.2%)		19명(29.6%)	

Figure 9와 같이 7단계까지 해당하는 원을 모두 그려서 원의 개수를 구하였다. 수치화 전략을 사용한 학생들은 1단계는 2개, 2단계는 4개, 3단계는 6개, ⋯, 6단계는 12개, 7단계는 14개를 모두 기록하면서 2씩 더하는 규칙을 통해 문제를 해결한 것으로 나타났다.

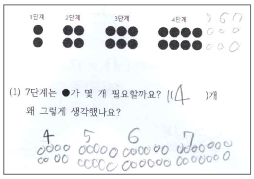

***Figure* 9.** 1-(1) a case of arithmetical generalization

나머지 53명은 도형 패턴의 구조를 파악하여 대수적 일반화로 근 일반화 문제를 해결하였다. 이 중 52명은 ‘현단계×2’ 또는 ‘현단계의 2배’라는 규칙을 찾아 7단계에 해당하는 14개를 옳게 구하였다. 이 중에서 20명은 ‘단계×2’라는 식을 명시적으로 기록하여 문제를 해결하였다. 2명은 *Figure* 10과 같이 찾은 규칙을 □와 △를 사용하여 수식으로 표현하였는데, 이는 이 학생들이 기호를 사용하여 대수적 일반화를 시도하고 있음을 보여준다. 나머지 30명은 7단계의 원의 개수가 현단계의 2배라거나 현단계에 ×2를 하면 된다고 문제 해결 과정을 설명한 것으로 나타났다.

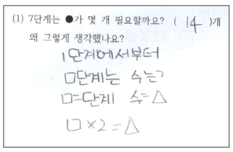

***Figure* 10.** 1-(1) a case of algebraic generalization

한편, 학생A는 유일하게 단계와 원의 개수 사이의 관계에 집중하여 ‘1:2=7:14’와 같이 비례식을 세워 문제를 해결하였으며, 이 학생은 1-(2) 원 일반화 문제도 같은 방식으로 해결한 것으로 나타났다.

1-(2) 원 일반화 문제 해결 양상을 살펴보면, 정답자 60명 모두 도형 패턴의 구조를 파악하여 대수적 일반화로 문제를 옳게 해결하였다. 이 중에서 59명은 모두 58×2(또는 2×58)를 하여 58단계에는 116개의 원이 필요함을 구하였다. 앞서 근 일반화에서 그림 그리기, 수치화 전략을 사용했던 학생들도 1-(2)에서는 원의 개수가 현단계의 2배라는 규칙을 발견하고 대수적 일반화를 수행한 것으로 나타났다(*Figure* 11). 이러한 전략의 변화는 원 일반화 문제 해결 시 해당 학생들의 사고가 산술적 일반화에서 대수적 일반화의 방향으로 이행하였음을 파악하게 한다. 근 일반화 문제를 비례식으로 해결했던 1명은 원 일반화 문제도 비례식으로 해결한 것으로 나타났다.

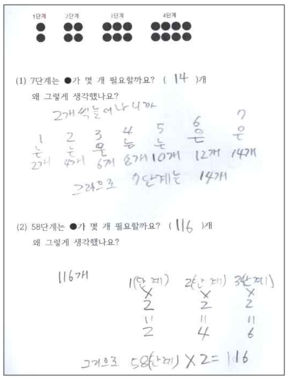

***Figure* 11.** Q1. a case of generalization

한편 1-(1) 근 일반화 문제만 옳게 해결했던 3명은 모두 도형 패턴의 구조를 파악하여 7×2(또는 2×7)로 문제를 해결하였다. 이 학생들은 원 일반화 문제에서도 마찬가지 방식으로 구조를 이용한 대수적 일반화를 수행하였으나 58×2 수행시 계산 실수로 인한 오답인 것으로 나타났다.

나. 2번 문항

성냥개비가 3개씩 늘어나는 성장패턴 구조에 해당하는 2번 문항의 2-(1) 근 일반화와 2-(2) 원 일반화 문제를 둘 다 옳게 해결한 학생은 26명(약 40.6%)으로 상대적으로 낮은 정답률을 보였다. 둘 다 정답을 한 26명의 근 일반화와 원 일반화 문제 해결 양상을 정리하면 *Table* 3과 같다. 이때 2번 문항의 경우, 26명 모두 근 일반화 문제를 해결했던 것과 동일한 방법으로 원 일반화 문제를 해결한 것으로 나타났고, 따라서 2-(1)과 2-(2)의 일반화 유형을 종합적으로 분석하고자 한다.

***Table* 3.** Results of Q2 (N=26)

	2-(1) 근	2-(2) 원
산술적 일반화	1명	1명
대수적 일반화	25명	25명

먼저 26명 중 14명이 한 단계씩 올라갈 때마다 성냥개비가 3개씩 늘어나기 때문에 (현단계)×3을 하고 그 결과에다가 1단계부터 있던 1개를 더해주는 방식으로, 즉 '(현단계)×3+1'로 성냥개비의 개수를 구하였다(*Figure* 12). 즉 2-(1)과 2-(2)를 모두 옳게 해결한 학생 중 절반 이상이 패턴의 구조를 n×3+1로 파악하는 대수적 일반화를 수행한 것이다.

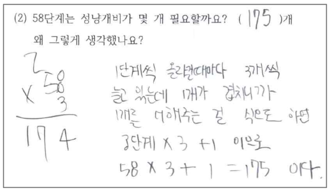

***Figure* 12.** 2-(2) a case of algebraic generalization

8명은 *Figure* 13과 같이 성냥개비가 3개씩 늘어나는 규칙을 발견하였으나 '(현단계-1)×3'을 하고 그 결과에다가 1단계에 해당하는 4를 더해주는 방식으로, 즉 '(현단계-1)×3+4'로 성냥개비의 개수를 구하였다. 이 학생들은 (n-1)×3+4로 패턴의 구조를 파악하고 대수적 일반화를 수행한 것이다. 또한 이 중에는 *Figure* 14와 같이 수치화와 그림 그리기 전략의 산술적 일반화를 통해 패턴의 구조를 파악한 다음 결과적으로 대수적 일반화를 한 사례도 있었다. 이는 해당 학생이 산술적 일반화에서 대수적 일반화로 전이하는 과도기 상태이거나 대수적 일반화에서 산술적 일반화로의 환원이 가능한 상태일 수 있음을 추측하게 한다.

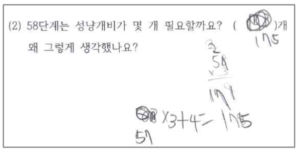

***Figure* 13.** 2-(2) a case of algebraic generalization

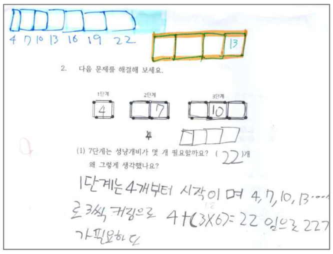

***Figure* 14.** 2-(1) a case of generalization

2명은 그림을 가로와 세로에 놓인 성냥개비로 구분하여 가로와 세로의 증가 규칙에 맞게 성냥개비의 개수를 각각 구하여 더하는 방식으로 일반화를 수행하였다. 즉 가로(위, 아래)와 세로로 부분을 나누어 n×2+n+1로 패턴의 구조를 파악하고 대수적 일반화를 수행한 것이다(*Figure* 15).

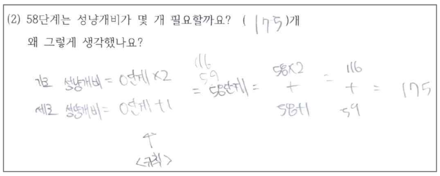

***Figure* 15.** 2-(2) a case of algebraic generalization

나머지 2명 중 1명은 (현단계)×4를 하고 거기서 겹치는 부분, 즉 (현단계)-1만큼을 빼낸다는 규칙을 발견하여 4×58-57을 계산해서 성냥개비의 개수를 옳게 구하는 대수적 일반화를 수행하였다(*Figure* 16).

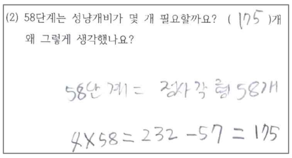

***Figure* 16.** 2-(2) a case of algebraic generalization

다른 1명은 성냥개비의 개수가 3씩 증가하는 것은 파악하였으나 도형 패턴의 구조에 기초하기 보다는 *Figure* 17과 같이 58번째까지 성냥개비의 개수를 모두 써서 성냥개비의 개수를 구하는 수치화 전략을 사용한 것으로 나타났다. 이러한 결과는 이 학생이 2번 문항 해결 시 초보적인 산술적 일반화를 수행하였음을 뒷받침한다.

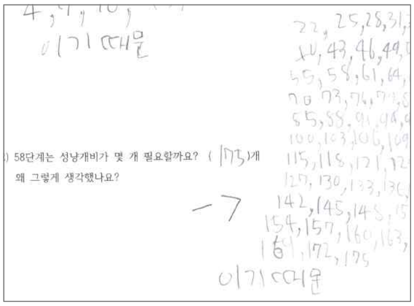

***Figure* 17.** 2-(2) a case of arithmetical generalization

한편 2번 문항의 부분 오답자 15명은 각각 2-(1)만 맞힌 경우(13명)와 2-(2)만 맞힌 경우(3명)이다. 각 경우의 정답 반응에 대한 일반화 양상을 분석한 결과는 다음과 같다.

먼저 2-(1) 근 일반화 문제만 옳게 수행한 13명 중 8명은 산술적 일반화로, 5명은 대수적 일반화로 문제를 해결한 것으로 나타났다. 이는 앞서 2-(1), 2-(2) 둘 다 옳게 해결한 학생 26명 중 25명이 대수적 일반화로 2-(1)을 해결했던 것과는 다소 상이한 결과이다.

산술적 일반화를 수행한 8명 중 4명은 7단계에 해당하는 성냥개비를 그려서 개수를 세는 그림 그리기 전략을 사용했고, 다른 4명은 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22와 같이 7단계까지 성냥개비의 개수를 세어 올라가는 수치화 전략을 사용한 것으로 나타났다. 이때 후자인 수치화 전략을 사용했던 학생B는 *Figure* 18과 같이 2-(2)의 원 일반화 문제도 동일한 방식으로 시도하다가 오답을 한 것으로 나타났다. 이러한 산술적 일반화는 원 일반화 문제 해결 시 낮은 정확도로 이어질 수 있음을 보여준다.

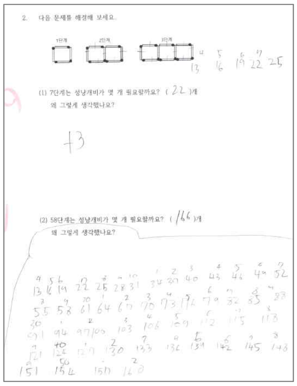

***Figure* 18.** Q2. a case of arithmetical generalization

대수적 일반화를 수행한 5명 중 2명은 주어진 도형 패턴을 n×3+1 구조로 파악하여 7×3+1로 문

제를 해결한 경우이고, 다른 2명은 (n-1)×3+4 구조로 파악하여 6×3+4로 문제를 해결한 경우이다. 나머지 1명은 4×n-(n-1) 구조로 파악하여 4×7-6으로 문제를 해결하였다. 그러나 이들 모두 원 일반화 문제 해결은 실패하여 이들의 대수적 일반화가 다소 불완전함을 알 수 있다.

반대로 2-(2) 원 일반화 문제만 옳게 수행한 3명의 일반화 양상을 살펴보면, 이들은 모두 도형 패턴을 n×3+1 구조로 파악하여 58×3+1로 해결하는 대수적 일반화를 수행하였다. 한편 2-(1)에서는 3명 모두 계산 실수를 하여 답을 22가 아닌 21로 쓴 것으로 나타났다.

다. 3번 문항

불변하는 1개의 도형이 중심에 있고 왼쪽, 오른쪽, 위쪽 방향으로 기본도형이 1개씩 늘어나는 성장패턴 구조에 해당하는 3번 문항의 3-(1) 근 일반화와 3-(2) 원 일반화 문제를 둘 다 옳게 해결한 학생은 22명(약 34.4%)으로 네 문항 중 가장 낮은 정답률을 보였다. 이러한 22명의 근 일반화와 원 일반화 문제 해결 양상을 정리하면 *Table* 4와 같다. 이때 22명 중 19명이 3-(1)과 3-(2) 두 문제의 해결 방법이 동일하였고, 나머지 3명은 두 일반화 방식에 차이를 보였다.

***Table* 4.** Results of Q3 (N=22)

	3-(1) 근	3-(2) 원
산술적 일반화	3명	·
대수적 일반화	19명	22명

3-(1)과 3-(2) 두 문제의 해결 방법이 동일했던 19명은 모두 대수적 일반화만 수행한 것으로 나타났다. 이 중 가장 다수가 사용한 일반화 방법은 단계가 올라갈수록 정사각형이 3개씩 많아지므로 '3×(현단계-1)'에 처음의 1개를 더하는, 즉 주어진 도형 패턴을 '1+(현단계-1)×3'의 구조로 파악하여 대수적 일반화하는 방식이다(12명). 이 학생들은 그림을 통해 구조를 파악하여 일반화한 학생들(*Figure* 19)과 1, 4, 7, …과 같이 수치로 나타내어 수가 3씩 증가하는 관계를 파악한 다음 대수적 일반화한 학생들로 범주화된다.

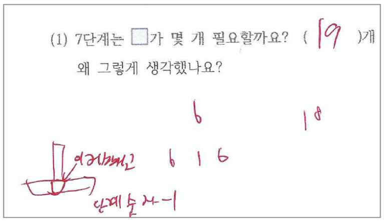

***Figure* 19.** 3-(1) a case of algebraic generalization

6명은 주어진 그림을 보고 도형을 왼쪽, 가운데, 오른쪽의 세 부분으로 나눈 다음 왼쪽과 오른쪽은 각각 전단계의 수와 같고 가운데 부분은 현단계의 수와 같음을 파악하여, 즉 '(현단계-1)×2+현단계'의 구조로 대수적 일반화한 경우이다(*Figure* 20). 이때 그림을 그려서 구조를 파악한 다음 6×2+7, 57×2+58로 문제를 해결한 5명과 달리 학생C는 별도의 그림 없이 *Figure* 21과 같이 곧바로 식으로 일반화를 표현하기도 하였다.

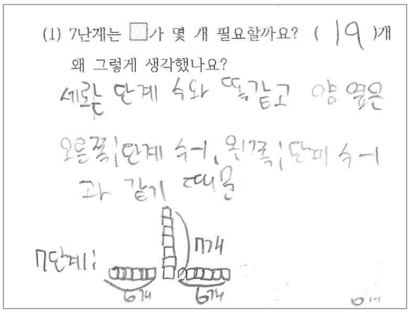

***Figure* 20.** 3-(1) a case of algebraic generalization

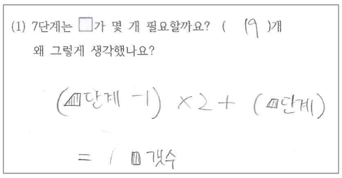

***Figure* 21.** 3-(1) a case of algebraic generalization

나머지 1명은 (현단계)×3을 하고 거기서 2번 추가로 들어간 것을 빼는 ‘(현단계)×3-2’의 구조로 패턴을 파악하고 일반화를 수행하였다.

한편 전체 정답자 22명 중 3명은 근 일반화와 원 일반화 문제 해결에서 차이를 보였다. 학생D는 *Figure* 22와 같이 3-(1) 문제 해결 시 그림 그리기 전략을 사용해서 7단계의 사각형 개수를 구하는 산술적 일반화를 수행하였으나, 원 일반화 문제를 해결할 때는 ‘(현단계)×3-2’의 구조를 파악하여 대수적 일반화를 수행하였다.

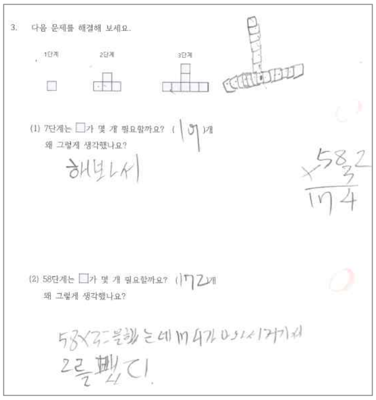

***Figure* 22.** Q3. a case of generalization

학생E는 학생D와 마찬가지로 그림 그리기 전략을 사용해서 산술적 일반화를 수행하였으나, 58단계에 해당하는 사각형의 개수를 구할 때는 ‘(현단계-1)×2+현단계’의 구조를 파악하여 대수적 일반화를 수행하는 차이가 있었다(*Figure* 23).

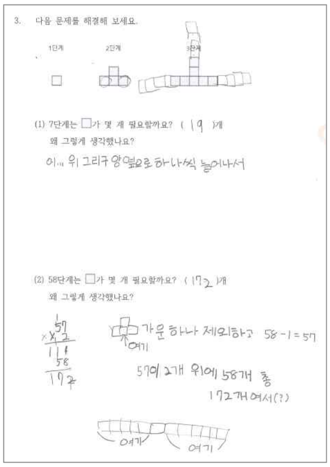

***Figure* 23.** Q3. a case of generalization

마지막으로 학생F는 그림 그리기뿐만 아니라 3씩 증가하는 규칙을 발견하여 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19까지 모두 기록하는 수치화 전략의 산술적 일반화로 근 일반화 문제를 해결하였다. 원 일반화 문제를 해결할 때는 ‘(현단계)×3-2’의 구조를 파악하여 대수적 일반화를 한 것으로 나타났다.

한편 3번 문항에 대한 부분 오답자 22명은 3-(1) 근 일반화 문제는 옳게 수행하고 3-(2) 원 일반화 문제에서만 오류를 보인 경우이며, 이 학생들이 3-(1) 문제 해결 시 보인 일반화 양상은 다음과 같다.

분석 결과 22명 모두 3-(1) 문제 해결 시 산술적 일반화를 수행한 것으로 나타났다. 이 중 16명은 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19까지 수를 모두 기록하는 수치화 전략을 사용하여 문제를 옳게 해결하였다. 그러나 이들은 3-(2)에 대해서는 58단계까지 3씩 증가하는 수를 정확하게 기록하지 못하거나 아무런 시도를 하지 못하는 등 원 일반화 문제 해결 시에는 어려움을 보이는 것으로 나타났다.

5명은 그림 그리기 전략을 사용하여 3-(1)을

옳게 해결했는데, 이 중에는 *Figure* 24와 같이 4단계, 5단계, 6단계, 7단계를 각각 전부 그림으로 나타낸 학생, *Figure* 25와 같이 58단계까지 그림을 그려서 문제를 해결하려고 시도하다가 3-(2)는 실패한 학생 사례도 있었다. 이러한 결과는 이 학생들이 그림을 보고 성장패턴의 규칙을 파악하기는 했으나 아직 산술적 일반화 수준에 머물러 있음을 보여준다.

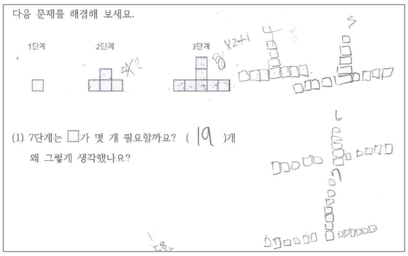

***Figure* 24.** 3-(1) a case of arithmetical generalization

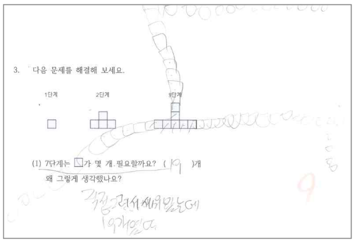

***Figure* 25.** 3-(1) a case of arithmetical generalization

나머지 1명은 그림 그리기 전략과 수치화 전략을 둘 다 사용해서 7단계의 사각형 개수를 구하는 산술적 일반화를 수행하였다.

라. 4번 문항

n×n 형태의 도형 패턴에 관한 4번 문항의 경우, 4학년 1학기 수학교과서에서 동일한 문제를 다루었었기 때문에 높은 정답률이 기대되었다. 그러나 4-(1), 4-(2) 둘 다 옳게 해결한 학생은 30명(약 46.9%)으로 나타났다. 이 학생들은 모두 '(현단계)×(현단계)'가 구하고자 하는 사각형의 개수라는 도형 패턴의 구조를 대수적으로 일반화하여 근 일반화와 원 일반화 두 문제를 옳게 해결하였다(*Table* 5).

***Table* 5.** Results of Q4 (N=30)

	4-(1) 근	4-(2) 원
산술적 일반화	·	·
대수적 일반화	30명	30명

다음으로 4-(1) 근 일반화 문제는 옳게 수행하였으나 4-(2) 원 일반화 문제 해결 시에만 오류를 보인 학생 14명의 일반화 전략을 분석하였다. 14명 중 12명은 앞의 경우와 마찬가지로 (현단계)×(현단계)의 구조를 파악하여 사각형의 개수 49개를 옳게 구하는 대수적 일반화를 수행한 것으로 나타났다. 나머지 2명은 7단계의 모양을 그려봄으로써 사각형의 개수를 구했는데, 학생G는 4단계, 5단계, 6단계에 해당하는 모양까지 모두 그리면서 산술적 일반화를 수행한 것으로 파악되었다(*Figure* 26).

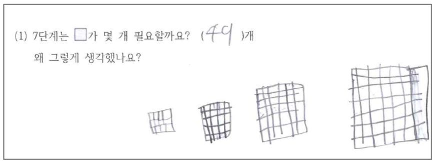

***Figure* 26.** 4-(1) a case of arithmetical generalization

마지막으로 4-(2) 원 일반화 문제는 옳게 수행했으나 4-(1) 근 일반화 문제에서만 오류를 보인 학생 1명은 (현단계)×(현단계)의 구조를 옳게 파악하여 대수적으로 일반화하였으나 4-(1) 문제 해결 시 7단계를 6단계로 착각하여 36개를 기록하는 실수를 한 것으로 나타났다.

2. 문항별 오류 유형

이 절에서는 문항별 학생들이 보인 오류 유형을 분석한다. 이때, 네 문항 중 1번의 경우에는 64명 중 4명만이 오답 반응을 보였는데 1-(1)의 오답 1명은 7단계가 아닌 5단계를 구한 경우(5×2=10)이고, 1-(2)의 오답 4명은 2×58을 116이 아닌 118(2명), 216(1명), 140(1명)으로 잘못 계산한 오류였다. 따라서 2번, 3번, 4번 문항에 대해서만 구체적인 오류 유형을 기술하였다.

가. 2번 문항

2번 문항의 2-(1) 근 일반화 문제의 오답자는 25명, 2-(2) 원 일반화 문제의 오답자는 35명이다. 이 중 2-(1)과 2-(2) 둘 다 오답을 한 학생은 22명이고, 일차적으로 이들의 오류 유형은 다음과 같다.

가장 높은 비율의 오류 유형은 1단계만 성냥개비의 개수가 4개이고 3개씩 늘어난다는 규칙을 발견하지 못하고 '(현단계)×4'를 해서 문제를 해결한 경우이다(14명). 이들은 주어진 도형 패턴에서 정사각형 각각의 모양에 주목함으로써 7단계, 58단계는 4개의 변으로 둘러싸인 정사각형이 각각 7개, 58개 있는 것으로 잘못 일반화하는 오류를 범하였다.

둘째로 높은 비율을 차지한 오류 유형은 성냥개비의 개수에 주목하지 않은 채 단순히 7단계니까 7개, 58단계니까 58개라고 답한 경우이다(5명). 이러한 오류를 보인 학생 중 학생H는 *Figure* 27과 같이 7단계에는 정사각형 7개를, 58단계에는 정사각형 58개를 모두 그리려는 시도를 하였다. 특히 58단계까지 성냥개비를 모두 그려서 구하려고 시도했으나 옳게 그리지도 못하고 문제 해결에 실패하였다. 이러한 사례는 이 오류 유형 또한 직전에 제시된 오류 유형과 마찬가지로 성냥개비의 개수가 아닌 정사각형 모양 자체에 집중하여 일반화를 시도한 것임을 추측하게 한다.

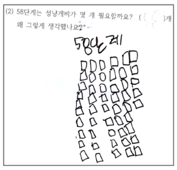

***Figure* 27.** 2-(2) an error case of arithmetical generalization

2명은 성냥개비가 3개씩 늘어나는 규칙은 찾았지만 1단계에 놓인 4개는 고려하지 못하고 '(현단계)×3'을 해서 일반화한 오류 유형으로 나타났다.

나머지 1명은 단계가 올라갈 때마다 성냥개비가 3개씩 늘어난다는 규칙을 파악한 다음, 수치화 전략을 사용하여 7단계까지, 58단계까지의 성냥개비 개수를 모두 세는 방식으로 문제를 해결하였으나 그 과정에서 실수를 하여 2-(1)은 19개, 2-(2)는 151개라고 응답하는 오류를 보였다. 이처럼 산술적 일반화에 해당하는 수치화 전략은 학생들이 수를 세는 과정에서 중간의 어느 단계에선가 실수를 할 경우 최종 단계에서 오답을 하게 된다는 단점이 명백하다.

이어서 2-(1) 근 일반화 문제는 옳게 수행하였으나 2-(2) 원 일반화 문제에서만 오류를 보인 13명의 오류 유형을 분석하였다. 13명 중 4명은 대수적 일반화를 통해 식을 옳게 세웠으나 계산 실수를 하여 오답을 한 경우이고, 5명은 아예 아무런 시도조차 하지 못한 경우이다.

나머지 4명의 오류를 살펴보면, 먼저 학생I는 성냥개비가 3개씩 늘어나는 규칙은 찾았지만 1단계에 놓인 4개에다가 (현단계)×3을 더하는 방

식으로, 즉 ‘4+(현단계)×3’으로 계산하여 문제를 해결하는 오류를 보였다. 다른 학생 3명은 58단계까지의 성냥개비 개수를 전부 수치화하여 문제를 해결하려고 시도하였으나 세어 올라가는 과정에서 실수를 하여 제각각의 오답을 보인 경우로 나타났다.

한편 2-(2) 원 일반화 문제만 옳게 수행한 3명의 2-(1) 근 일반화 문제 해결에 대한 오류 유형을 살펴보면, 이들은 모두 n×3+1 구조로 옳게 파악하였으나 7×3+1을 21이라고 계산 실수한 경우로 나타났다. 이 중 학생J는 ‘(현단계)×3+1’로 옳게 일반화하였으나 수치화 전략을 병행하는 과정에서 오답을 도출한 것으로 파악되었다(*Figure* 28). 이는 이 학생이 산술적 일반화와 대수적 일반화를 혼용하고 있는데 산술적 일반화로 인해 문제 해결의 정확성이 낮아질 수도 있음을 파악하게 한다.

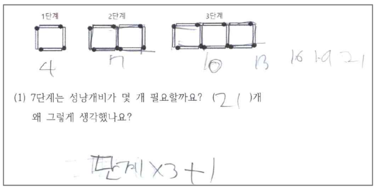

***Figure* 28.** 2-(1) an error case of generalization

나. 3번 문항

3번 문항의 3-(1) 근 일반화 문제의 오답자는 20명, 3-(2) 원 일반화 문제의 오답자는 42명이다. 이 중 3-(1)과 3-(2) 둘 다 오답을 한 학생은 20명으로 3-(1) 오답자와 동일하며, 일차적으로 이들이 근 일반화 문제 해결 시 보인 오류 유형을 분석하였다.

3-(1) 문제 해결 시 가장 비율이 높은 오류 유형은 3씩 증가하는 규칙은 발견하였으나 1단계의 사각형 1개는 고려하지 않은 채 3×7을 해서 21개라고 응답한 경우이다(9명). 이는 주어진 도형 패턴에서 ‘증가하는 3씩’이 학생들에게 매우 주목됨을 추측하게 한다. 이 중 학생K는 1, 4, 7, 10과 같이 사각형의 개수를 수로 표현하는 전략까지 병행했음에도 불구하고 결과적으로 3씩 증가한다는 점에만 집중함으로써 21개라고 오답을 한 것으로 나타났다. 학생이 표현한 그림에서 증가하는 3개의 사각형이 매우 강조되어 색칠된 점도 이러한 추측을 뒷받침한다(*Figure* 29).

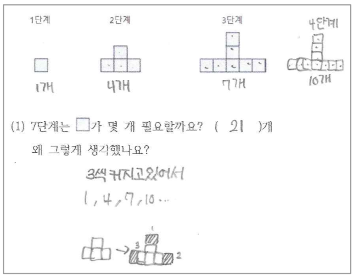

***Figure* 29.** 3-(1) an error case of generalization

2명은 7단계의 사각형 개수를 22개라고 오답한 경우이다. 이들은 사각형이 3개씩 증가하는 규칙은 발견하였으나 1단계에 1개가 있기 때문에 7단계에는 1+3×6을 해야 하는데, 1+3×7로 문제를 해결하여 오류를 보인 것으로 나타났다.

다른 2명은 위로는 1개씩, 양옆으로는 2개씩 증가한다는 패턴의 구조를 파악하였으나, 이것을 각각 ‘(현단계)+1’, ‘(현단계)+2’로 계산함으로써 7+1, 7+2이므로 8+9=17이라고 오류를 보였다.

그밖에 7단계에 해당하는 사각형의 개수를 15개, 16개, 23개, 20개라고 오답한 학생이 각 1명이었다. 먼저 15개라고 오답한 학생은 사각형이 2개씩 증가한다고 인식하여 ‘(현단계)×2+1’로 일반화함으로써 주어진 도형 패턴의 구조를 알맞게 파악하지 못한 것으로 나타났다. 16개라고 오

답한 학생은 주어진 그림을 보고 가로는 세로보다 항상 2개 더 많다는 것으로 구조를 잘못 파악함으로써 7+9를 하여 16개라고 오답을 한 경우이다. 23개라고 오답한 학생은 3개씩 증가하는 패턴의 구조를 옳게 파악했으나 각 단계에 해당하는 사각형의 개수를 모두 수치화하는 과정에서 6단계인 16 다음에만 3이 아닌 7을 더하여 7단계에 해당하는 사각형의 개수를 23개라고 잘못 기록한 경우이다. 이는 수치화 전략이 다소 정확성이 떨어지며 여러 부수적인 오류를 야기할 수 있는 산술적 일반화 전략임을 보여준다. 20개라고 오답한 학생 또한 3개씩 증가하는 구조를 파악하였으나 3씩 더해가는 과정에서 계산 실수를 한 것으로 나타났다. 한편, 나머지 3명은 아무런 문제 해결의 시도조차 하지 못하였다.

3-(2) 원 일반화 문제에서 오류를 보인 학생은 총 42명인데 이 중 13명은 문제 해결을 위한 아무런 시도도 하지 못한 채 공란으로 검사지를 제출했기 때문에, 나머지 29명이 보인 오류 유형을 분석하였다.

가장 높은 비율의 오류 유형은 사각형의 수가 3개씩 증가한다는 도형 패턴의 구조를 발견하여 '(현단계)×3'으로 잘못 일반화해서 58×3=174개라고 오답을 한 경우이다(11명). 이 중 8명은 3-(1) 근 일반화 문제에서도 동일한 양상의 오류를 보였으며, 나머지 3명은 3개씩 더해가며 사각형의 개수를 세어 3-(1)에서는 정답 반응을 보였던 것으로 나타났다.

4명은 사각형이 2개씩 증가한다고 잘못 일반화하여 58×2=116개라고 오답하였다. 이들은 모두 3-(1)에서는 그림 그리기(2명), 수치화(2명) 전략을 사용하여 옳게 산술적 일반화를 수행한 것으로 나타났다. 이러한 결과는 기초적인 산술적 일반화 전략을 수행하는 학생들 중 일부는 패턴의 구조를 파악하여 대수적 일반화를 하는 데 아직 어려움을 겪을 수도 있음을 짐작하게 한다.

2명은 사각형이 2개씩 증가한다고 인식하여 '(현단계)×2+1'로 일반화함으로써 58×2+1=117로 오류를 보인 경우이다. 이 중 1명은 3-(1)에서는 수치화 전략으로 옳게 산술적 일반화를 수행한 것으로 나타났다.

또 다른 2명은 58단계를 10단계 5번과 8단계로 임의 분해함으로써 10단계의 사각형 개수인 28개를 5번 취한 28×5=140개와 8단계의 사각형 개수인 22개를 더하여 162개라고 오류를 보였다. 이 두 학생은 3-(1) 문제를 해결할 때는 각각 그림 그리기 전략과 수치화 전략을 사용하여 산술적 일반화를 옳게 수행했던 학생들이다.

그밖에 58단계에 해당하는 사각형의 개수를 175개, 119개, 118개, 58개, 165개(2명), 163개, 166개, 173개, 151개라고 응답한 학생들이 각 1명씩(165개는 2명) 있었다. 이 중 175개라고 응답한 학생은 '(현단계)×3+1'로 잘못 일반화하여 58×3+1로 계산한 경우이며 근 일반화 문제에서도 동일한 오류를 보인 것으로 나타났다. 119개라고 응답한 학생은 위로 1개씩, 옆으로 2개씩 증가하는 구조는 파악하였으나 세로를 (현단계+1)개, 가로를 (현단계+2)개로 잘못 일반화함으로써 (58+1)+(58+2)로 계산한 것으로 나타났다. 118개라고 응답한 학생은 양옆으로 2개씩 증가한다는 규칙에 집중하여 세로는 (현단계)개, 가로는 (현단계+2)개로 잘못 일반화하여 58+(58+2)로 계산하는 오류를 보인 경우이다. 58개라고 응답한 학생은 패턴의 구조를 전혀 파악하지 못한 채 현단계에 해당하는 수를 단순히 기록한 것으로 나타났다. 나머지 오답 사례들은 모두 대수적 일반화를 하지 못하여 일일이 58단계까지 사각형의 개수를 세어 올라가는 산술적 일반화 전략을 시도하다가 오류를 보인 경우이다.

다. 4번 문항

4번 문항의 4-(1) 근 일반화 문제의 오답자는 20명, 4-(2) 원 일반화 문제의 오답자는 33명이다. 이 중 원 일반화 문제는 옳게 수행하고 근 일반화 문제에서만 오답 반응을 보인 1명은 7단계를 6단계로 착각하는 실수 사례로 나타났기 때문에 분석에서 제외하였다.

4-(1)과 4-(2) 둘 다 오답을 한 학생은 19명이며, 일차적으로 이들의 일반화 오류 유형을 분석하였다. 먼저 19명 중 6명이 4번 문항과 관련하여 아무런 시도도 하지 못한 것으로 나타났다. 검사 시간은 40분(1차시)으로 충분히 제공되었고 문항이 총 4개임을 사전에 안내하고 검사를 실시한 상황이기 때문에 6명의 학생이 이 문항과 관련하여 아무런 시도를 하지 못한 것에 대해서는 추가적인 파악이 요구된다.

4명은 4-(1) 21개, 4-(2) 174개라고 오답 반응을 보였는데, 이들은 모두 '(현단계)×3'이라고 잘못 일반화한 경우이다. 학생L이 그린 그림은 가로로만 사각형의 개수가 증가하고 세로 방향을 고려하지 않은 채 3단계에 준하여 7×3, 58×3으로 문제를 해결했음을 추측하게 한다(*Figure* 30).

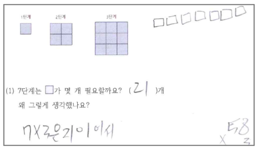

***Figure* 30.** 4-(1) an error case of arithmetical generalization

2명은 주어진 도형 패턴의 2단계와 3단계 사이의 개수 차이에 주목하여 5씩 커진다고 규칙을 잘못 파악하였다. 뿐만 아니라 이러한 구조를 '(현단계)×5'라고 잘못 일반화함으로써 7단계의 사각형 개수를 7×5=35개라고 하였고, 58단계는 58×5를 시도하였으나 각각 계산 실수를 범하기도 하여 전반적인 수학 학습에서 어려움을 겪는 것으로 추측되었다. 다시 말해, 도형 패턴의 일반적 규칙이 아닌 특정 한 단계에서의 변화에 주목하는 오류, 가법적 구조를 승법적 구조로 잘못 인식하는 오류가 확인되었다.

나머지 7명의 학생들은 그림 그리기(5명), 수치화(2명) 전략을 사용하여 4-(1), 4-(2) 문제를 해결하려고 시도하였으나, 성장패턴의 규칙을 바르게 파악하지 못하거나(*Figure* 31) 수를 써 나아가는 과정에서 실수를 함으로써 제각각의 오답 반응을 보인 것으로 나타났다.

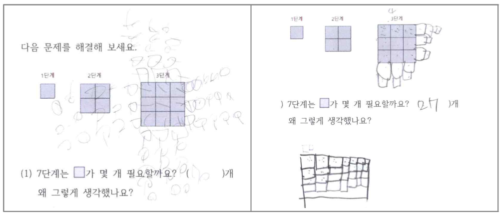

***Figure* 31.** 4-(1) error cases of arithmetical generalization

이어서 4-(1) 근 일반화 문제만 옳게 수행하고 4-(2) 원 일반화 문제에서 오답을 한 14명의 반응을 분석하였다. 이 중 9명은 주어진 도형 패턴의 구조를 (현단계)×(현단계)로 옳게 일반화였으나 58×58을 하는 과정에서 계산 실수를 한 경우이다. 3명은 근 일반화 문제는 7×7로 옳게 수행하였으나 4-(2) 문제에서는 아무런 시도조차 하지 못하여 원 일반화 문제 해결에 어려움을 겪는 것으로 나타났다. 다른 2명도 4-(2) 문제에서 아무런 시도도 하지 못했으나 이들은 4-(1)에서 근 일반화 문제를 해결하기 위해 그림 그리기 전략을 사용했었다는 차이가 있다.

V. 결론 및 시사점

학생들이 중학교에 진급하면 본격적으로 대수를 학습하게 되므로, 초등학교 6학년 시기를 전후로 산술적 사고에서 대수적 사고로의 원만한 전이는 학생들의 성공적인 수학 학습의 토대가 된다고 할 수 있다. 앞서 언급했듯이 대수적 사고의 대표적 특징 중 하나는 일반화이고, 따라서 학생들이 중학교 수학을 학습하기 이전에 기초적인 대수적 일반화가 가능하도록 준비될 필요가 있다. 이에 본 연구에서는 초등학교 6학년 학생 64명을 대상으로 대표성을 띠는 4가지 도형 패턴의 구조를 파악하는 문제를 제공하여 근 일반화와 원 일반화 문제 해결 양상과 오류 유형을 분석하고, 그로부터 다음과 같은 결론 및 시사점을 도출하였다.

첫째, 다수의 초등학교 6학년 학생들이 산술적 일반화에서 대수적 일반화로의 전이에 어려움이 있는 것으로 나타났다. 이는 본 연구에서 도형 패턴의 구조를 파악한다면 간단한 수식의 계산을 통해서 답을 도출할 수 있음에도 불구하고 원 일반화 문제조차 그림 그리기나 수치화 전략으로 문제 해결을 시도했던 학생 사례를 통해서도 확인이 가능하다. 그러나 *Figure* 18, *Figure* 25 등에서도 알 수 있듯이 도형 패턴의 구조를 파악하지 못한 채 산술적 일반화 전략을 통해 원 일반화 문제를 해결하는 것은 예상치 못한 실수를 야기하는 등 여러 오류의 가능성이 크다. 따라서 산술적 일반화 수준에 머물러 있거나 불완전한 대수적 일반화를 수행하는 학생들을 대수적 일반화로 이행시키기 위한 적절한 지원이 요구된다. 이를 위해서는 학교 현장에서 본격적인 대수 학습 이전에 개별 학생의 산술적 일반화의 수준은 어떠한지, 기초적인 대수적 일반화는 어느 정도 가능한지 면밀히 파악하는 것이 선행되어야 한다. 예를 들어, 본 연구에서도 파악되었듯이 산술적 일반화와 대수적 일반화를 혼용하는 학생의 경우에는 이 학생이 산술적 일반화에서 대수적 일반화로의 과도기에 위치한 것인지, 아니면 대수적 일반화에서 산술적 일반화로의 원활한 환원이 가능한 상태인지를 파악함으로써 그에 맞는 교수학적 지원을 제공할 수 있다.

둘째, 도형 패턴의 원 일반화 문제의 오답률이 근 일반화 문제의 오답률에 비해 약 1.5배 내지 2배 이상 높은 것으로 나타났다(반복패턴인 1번 문항 제외). 연구 대상 학생들이 4학년 때 도형 배열의 규칙 찾기를 학습했고 5학년에서 혼합 계산식까지 배움으로써 자연수의 연산을 완료하였으며 현재 6학년 수학을 학습하고 있는 점을 감안할 때 2~4번의 원 일반화 문제 오답률이 전체 학생의 50~60% 내외라는 것을 당연한 결과로만 간주하기 어렵다. 이러한 오답률은 학생들이 도형 패턴의 구조를 파악하여 식으로 나타내기 어려워한다는 것을 함의한다. 대수적 일반화는 중학교 수학에서 대수를 학습하는 데 기초적인 것인데, 이러한 초보적인 대수적 일반화가 어렵다면 이후 중학교 대수 학습에서 부진으로 이어질 가능성이 있다. 따라서 초등학교 때 적절한 시기에 근 일반화 문제뿐만 아니라 원 일반화와 관련하여 구조를 파악하고 이에 관한 문제를 해결해 보는 학습의 경험이 제공되어야 한다. 이와 관련하여 4학년 때 똑같은 패턴을 학습했으나 정답률이 낮았던 4번 문항($n \times n$ 유형)을 살펴볼 필요가 있다. *Figure* 4에서 알 수 있듯이 학생들은 교과서에 제시된 4번째 도형까지 보고 5번째 도형이 무엇인지 찾는 활동을 경험하였다. 그럼에도 불구하고 4번 문항의 정답률이 낮은 것은 어쩌면 학생들이 도형 패턴의 구조를 정확히 파

악하지 못한 채 이 문제를 해결했을 가능성을 시사한다. 따라서 초등수학에서 더 높은 단계까지, 가능하다면 원 일반화 문제까지 적절히 학습하여 패턴의 구조를 파악하는 경험이 충분히 제공될 필요가 있고, 이를 통해 학생들의 대수적 사고로의 원만한 전이를 도울 수 있을 것이다.

셋째, 도형 패턴의 유형별로 학생들이 수행하는 산술적 일반화와 대수적 일반화에 차이가 있는 것으로 나타났다. 본 연구에서는 반복패턴 1개 문항과 성장패턴 3개 문항을 연구 대상에게 제공하였다. 이때 단순한 반복패턴인 1번 문항의 경우에는 정답률이 약 93.7%로 매우 높았을 뿐 아니라 정답자 중 다수가 근 일반화 문제에서조차 대수적 일반화를 수행하였다. 그러나 2, 3번과 같은 다소 복잡한 도형 패턴의 경우에는 부분 정답자나 오답자들 중 다수가 구조를 파악하지 못하고 산술적 일반화로 문제 해결을 시도하여 오류를 보였다. 이는 학생들이 대수적 일반화를 수행할 수 있는 도형 패턴과 시도조차 못하는 도형 패턴이 있음을 보여준다. 따라서 학생들에게 가급적 여러 유형의 도형 패턴에서 그 구조를 파악해 보게 하는 기회를 제공하는 것이 필요하다. 이는 초등학교 수학교과서에서 도형 패턴을 제시할 때 그 유형의 다양성을 다각도로 검토하고 포함해야 함을 함의한다. 이와 관련하여 Dretske(1990)는 시지각을 사물 자체를 단순한 대상으로 간주하는 감각적 지각과 감각을 넘어서 대상과 관련된 사실이나 성질을 보거나 인식하는 인지적 지각으로 분류하였다. 다양한 유형의 도형 패턴을 관찰하고 분석하면서 학생들은 감각적 지각을 넘어 인지적 지각을 활성화하게 되며, 이는 학생들의 일반화 사고를 신장시키는 데 도움이 될 것이다.

넷째, 초등학생들에게 도형 패턴의 규칙을 수치화하여 수를 세어가면서 산술적 일반화 전략으로 문제를 해결하는 것 이외에, 파악한 구조를 간단한 수식(예, (단계)×2)으로 표현하여 문제를 해결하는 것과 같이 기초적인 대수적 일반화의 기회를 제공해야 한다. 본 연구의 결과로부터 알 수 있듯이 근/원 일반화 양 문제의 정답자 중 대다수가 근 일반화 문제 또한 대수적 일반화를 통해 해결하였다. 한편 도형 패턴을 수치화하여 해결하는 접근은 사소한 실수로 오류를 야기하거나(*Figure* 18) 많은 시간과 노력이 소요되어 비효율적이다(*Figure* 17). 또한 근 일반화 문제에서 수치화 전략으로 문제를 옳게 해결했으나 원 일반화 문제에서는 오답을 했던 다수의 학생 사례는 학생들이 수치화 전략만으로는 도형 패턴의 구조를 파악하여 추후 대수적 일반화로 나아가는 데 한계가 있음을 보여준다. 즉 산술적 일반화 수준에 해당하는 학생들을 어떻게 대수적 일반화 수준으로 끌어올릴 수 있을지 논의가 필요한 것이다. 본 연구의 결과는 초등수학에서부터 산술적 사고에서 대수적 사고로의 원만한 전이를 돕기 위해 제시된 도형 패턴에 대해 수치화 전략으로만 문제 해결을 지도하는 것이 아니라 학생이 그림을 보면서 구조를 파악할 수 있도록 적극적으로 독려할 필요를 파악하게 한다. 비록 그림 그리기, 수치화 전략이 도형 패턴 관련 문제를 해결하기 위한 대표적인 산술적 일반화 전략이지만, 그러한 전략만을 수학교과서나 교사용 지도서에서 명시적으로 제시하는 것은 자칫 학생들의 다양한 일반화 전략 사용을 제한할 우려가 있다. 따라서 학생들이 배열을 관찰하고 구조를 분석하면서 일반화를 시도할 수 있는 기회와 적절한 발문을 제공하는 등 다양한 일반화 전략의 사용이 가능하도록 함으로써 대수적 사고로의 원만한 전이를 지원해야 한다.

참고문헌

Amit, M., & Neria, D. (2008). Rising to the challenge : using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM, 40*(1), 111-129.

Billings, E. (2008). Exploring generalization through pictorial growth patterns. *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 279-293). VA: NCTM.

Bishop, J. (2000). Linear geometric number patterns: middle school students' strategies. *Mathematics Education Research Journal, 12*(2), 107-126.

Choi, I. (2020). *A study on the pattern generalization process through the figural pattern learning environment : focusing on eye-tracking analysis and a microworld.* Doctoral dissertation, Seoul National University.

최인용(2020). **도형 패턴 학습 환경을 통한 패턴 일반화 과정에 관한 연구 – 안구 운동 추적을 활용한 분석과 마이크로월드를 중심으로-**. 서울대학교 박사학위논문.

Dretske, F. (1990). Seeing, believing, and knowing. *Visual cognition and action* (pp. 129-148). MIT Press.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Springer, Dordrecht.

Ellis, A. B. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations : generalizing actions and reflection generalizations. *The Journal of the Learning Sciences, 16*(2), 221-262.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19-26.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics, 27*(1), 59-78.

Kim, N. (1994). Considerations on algebraic thinking : arithmetic connection and variable concept. *Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics, 4*(2), 189-204.

김남희(1994). 대수적 사고에 관한 고찰 : 산술과의 관련성과 변수개념. **대한수학교육학회 논문집, 4**(2), 189-204.

Kim, N. (1997). Understanding of the meaning and the construction of generalization. *The Journal of Educational Research in Mathematics, 7*(1), 445-458.

김남희(1997). 일반화의 의미와 구성에 대한 이해. **수학교육학연구, 7**(1), 445-458.

Kim, S. (2002). On the transfer in mathematics learning -focusing on arithmetic and algebra-. *The Journal of Educational Research in Mathematics, 12*(1), 29-48.

김성준(2002). 수학 학습에서 이행에 관한 고찰 -산술과 대수를 중심으로-. **수학교육학연구, 12**(1), 29-48.

Kim, S. (2003). A study on elementary school algebra -focusing on 'early algebra'-. *The Journal of Educational Research in Mathematics, 13*(3), 309-327.

김성준(2003). '초기대수'를 중심으로 한 초등대수 고찰. **수학교육학연구, 13**(3), 309-327.

Kim, S. (2004). *Analysis of the algebraic thinking factors and search for the direction of its learning and teaching.* Doctoral dissertation, Seoul National University.

김성준(2004). **대수의 사고 요소 분석 및 학**

습-지도 방향 탐색. 서울대학교 박사학위논문.

Krutetškiĭ, V. A., Wirszup, I., & Kilpatrick, J. (1976). *Psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago: University of Chicago.
송상헌, 임재훈, 권석일, 남진영, 정영옥, 서동엽, 김성준, 김지원 공역(2014). **수학적 능력의 심리학**. 서울: 경문사.

Lee, L., & Freiman, V. (2006). Developing algebraic thinking through pattern exploration. *Mathematics Teaching in the Middle School, 11*(9), 428-433.

Ministry of Education (2019a). *Elementary mathematics textbook 4-1*. Seoul: Chunjae Education.
교육부(2019a). **수학 4-1**. 서울: ㈜천재교육.

Ministry of Education (2019b). *Elementary mathematics teacher's guidebook 4-1*. Seoul: Chunjae Education.
교육부(2019b). **수학 4-1 교사용 지도서**. 서울: ㈜천재교육.

Ministry of Education (2020). *Elementary mathematics textbook 2-2*. Seoul: Visang.
교육부(2020). **수학 2-2**. 서울: ㈜비상교육.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. VA: NCTM.

Polya, G. (1957). *How to solve it: a new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM, 40*(1), 83-96.

Rivera, F. (2013). *Teaching and learning patterns in school mathematics : psychological and pedagogical considerations.* NY: Springer.

Rivera, F., & Becker, J. R. (2011). Formation of pattern generalization involving linear figural patterns among middle school students : results of a three-year study. *Early algebraization* (pp. 323-366). Berlin: Springer.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164.

Warren, E. (2003). The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. *Mathematics Education Research Journal, 15*(2), 122-137.

Warren, E., & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns : actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics, 67*(2), 171-185.

Watson, A., & Mason, J. (2006). *Mathematics as a constructive activity.*
이경화 역(2015). **색다른 학교 수학**. 서울: 경문사.

Yu, M., & Ryu, S. (2013). A comparison between methods of generalization according to the types of pattern of mathematically gifted students and non-gifted students in elementary school. *School Mathematics, 15*(2), 459-479.
유미경, 류성림(2013). 초등수학영재와 일반학생의 패턴의 유형에 따른 일반화 방법 비교. **학교수학, 15**(2), 459-479.