대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 30 권 제 4 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 30, No. 4, 797 ~ 819. Nov 2020
DOI: https://doi.org/10.29275/jerm.2020.11.30.4.797

대수 알고리즘의 상세화에 의한 천천히 배우는 중학생들의 학습 효과 분석

유 재 근*
*홍천중학교 교사

Analysis of Learning Effects in Slow Learning Middle School Students by the Refinement of Algebraic Algorithms

Yoo, Jae-Geun*
**Teacher*, *Hongcheon middle school*, *South Korea*, kuki122@chol.com

초록. 본 논문은 천천히 배우는 중학생들의 대수 학습을 성장시키기 위한 교실수업 개선 사례를 연구한 것이다. 본 연구에서는 Watson & De Geest(2012)의 연구를 기반으로 교과서에 제시된 대수적 성질을 상세화하였고, 상세화된 수업 자료를 다양한 성취 수준이 혼합된 일반 학급에 투입하였을 때의 효과를 검증하였다. 즉, 일차적으로 성취 수준이 낮은 학생들에게는 긍정적인 효과가 나타나면서 더불어 성취 수준이 중위권 이상인 학생들에게도 긍정적인 효과를 기대한 것이다. 상세화 조치에 따른 효과는 SPSS 통계 도구를 활용하여 정량적으로 분석하였으며, 학생들이 작성한 답안에 대한 구체적인 사례를 바탕으로 정성적 분석을 시도하였다. 또한 파지효과를 분석하기 위하여 실험이 이루어진 직후에 사후검사1을 실시하고, 2개월이 지난 후에 사후검사2를 실시하여 그 결과를 비교하였다. 분석 결과, 사후검사1에서는 비교집단과 실험집단의 모든 수준에서 차이를 보이지 않았으나, 사후검사2에서는 실험반 하위 집단의 대수 성적이 통계적으로 유의한 것으로 나타나 파지효과가 확인되었다. 또한 중위 집단 이상의 대수 성적에는 통계적으로 차이가 없었으나 평균 비교를 통해 중위 집단 이상의 학습자에게도 긍정적인 영향을 주었음을 확인하였다. 이러한 연구결과는 모든 학생을 대상으로 한 혼합된 수학교실 수업에서 수학 부진 학생에게 도움이 될 수 있는 수업방안에 대한 교수학적 시사점을 제공한다.

핵심어: 교수학적 조치, 대수, 천천히 배우는 학생, 상세화, 세부과제, 비계설정

ABSTRACT. This paper is a study on the improvement of classroom instructions for enhancing algebra learning in slow learning middle school students. Based on the study of Watson & De Geest(2012), the algebraic properties presented in textbooks have been detailed in the present study. Also, the aim was to verify the effect of each level when the detailed instructional data was put into a general class where students with different achievement levels were mixed. The effect of the detailed instructional treatment was quantitatively analyzed using the SPSS statistical tool, and a qualitative analysis was attempted based on the specific examples of answers written by students. In addition, post-test 1 and post-test 2 were performed to analyze the retention effect. As a result of the analysis, no difference in all the levels of the comparison group and the experimental group in post-test 1 was observed; however, in post-test 2, the algebraic achievement of the lower group of the test group was statistically significant, thereby confirming the retention effect. Moreover, there was no statistically significant difference in algebraic achievements above the middle group. As a result of the average comparison, it was confirmed that the refined instructional treatments had a positive effect on learners above the middle group. These findings provide pedagogical implications for a lesson plan that can be helpful to students of all levels with poor math skills in the mixed mathematics classroom.

KEY WORDS: instructional treatment, algebra, PLAS(Previously Low Attainment Students), refinement, microtasks, scaffolding

Received: Oct 10, 2020 / Reviewed: Nov 10, 2020 / Accepted: Nov 19, 2020

Ⅰ. 서론

많은 학생의 낮은 수학 성취도는 국제적인 관심사이다. 최근 수학 성취도가 낮은 학생들만을 위한 특별 프로그램을 개발하기보다는, 다양한 수준의 학습자가 혼재된 교실에서 성취 수준별로 나름대로의 해결을 시도할 수 있는 교실 환경을 조성하고 있다. 더구나 모두에게 의미 있는 학습이 이루어질 수 있도록 함으로써 수학 교실 수업을 개선하고자 노력하였다(Watson & De Geest, 2012, p. 213).

우리나라도 7차 교육과정부터 수준별 수업을 실시하면서 개인차, 수준, 적성, 희망, 교사 수급과 유휴 교실 등의 학교 상황을 고려하여 효율적으로 운영하려고 노력해왔다. 여기서 수준별 수업이란 성취수준에 따라 내용 요소를 차별화하는 것이 아니라, 다양한 수준의 학생들이 동일한 내용 요소를 바탕으로 학습하되 내용의 깊이나 접근 방법에 차이를 둘 것을 강조한 것이다(Ministry of Education, 2015, p. 40). 이러한 교육과정 의도를 성공적으로 반영할 수 있다면, 성취수준이 낮은 학생들도 긍정적인 수학 성취를 경험할 수 있다는 점에서 정의적 측면의 개선에 도움이 될 수 있다. 따라서 모든 수준의 학생들에게 흥미를 주는 한편, 수학적으로도 의미 있는 아이디어에 참여하는 기회를 확대해주는 방안을 탐색할 필요가 있다. 다시 말해, 현장 연구에서 동일한 내용 요소를 수준에 따라 다양한 방법으로 접근할 수 있는 지도 방안을 모색해야 한다.

이와 관련하여 좋은 수학탐구 과제, 좋은 수업에 대한 선행연구가 이루어져 왔다(Watson & De Geest, 2012; Lee et al., 2017; Watson & Mason, 2005 등). 좋은 수업에 대한 정의는 학자에 따라 다를 수 있지만, 자기주도적인 탐구를 중시한다는 점은 일치한다. Lee et al.(2017)은 좋은 수학과제의 의미를 누구나 참여하여 수학적 탐구가 가능한 개방형 협력과제라 하였다. Watson & Mason(2005)은 수학을 구성적인 지식으로 보고 학생 스스로 예를 구성하게 함으로써 탐구를 유도하는 과제를 제시하였으며, Lee(2015)는 나름의 방법을 찾아 학교수학을 수학답게 탐구하는 것이 중요하다고 강조하였다.

다양한 수준이 혼합된 학급에서의 효과적인 수학수업이란, 특정 수준의 학생만을 대상으로 해서는 안 되며 모든 학생들의 시험 성적을 향상시킴과 더불어 정서적으로도 긍정적인 태도를 유지할 수 있는 것이어야 한다. Watson & De Geest(2012)는 복합적이고 일관성 있는 수학수업 구성을 제안하였으며, 이를 위해 사고하기, 레퍼토리, 자신감, 개념적 이해를 돕기 위한 비계설정을 요구하였다. 또한 교과서 내용을 세부과제로 배열함으로써 수학 개념 발달을 구조화할 수 있다고 설명한다. 특히 교과 내용을 세부과제로 제시한 결과, 성취수준이 낮은 학생을 포함한 모든 학생들의 학습에 도움이 되었음을 확인하였다. 이러한 관점에서 Watson & De Geest(2012)는 실행 가능한 분석틀을 고안하여 수학수업에 적용하였으며 세부과제의 학습 과정에서 학생들의 인지적 부하를 낮추는 효과를 확인하였다.

또한 산술과 대수의 인지적 틈을 확인하고 이를 극복하는 방안을 제시한 대수 관련 선행연구도 다수 존재한다(Sfard, 1995; Linchevski & Herscovics, 1996; Kim, 1997; Kim, 2004; Chang, 2007). 예를 들어, Kim(2004)은 학교대수에서 요구하는 핵심 사고의 범주를 제시하였다. 역사적으로 산술과 대수는 밀접한 관계에 있었고 일반화된 산술로서 존재하기도 하였다. Kim(1997)은 문자 기호와 표현이 형식적으로 전개되지만 학생들은 대수 표현을 구체적인 조작 또는 일반화된 산술과 연결하는 데서 어려움을 느낀다고 주

장하였다. 이러한 인지적 틈을 해소하기 위해 대수 지도의 방향으로 산술과의 연결성을 제안하였다.

이와 같이 수학 교수·학습에서 학습자의 탐구를 유도하기 위한 다양한 논의가 선행연구에서 이루어져 왔지만, 여러 수준의 학생들이 혼합된 교실에서 수학 성취도가 낮은 학생을 위해 적용 가능한 프로그램 개발과 관련된 연구는 드물다. 특히 이러한 프로그램을 개발하는 데 있어서 고려할 점은 수학 성취도가 낮은 학생뿐만 아니라, 나머지 학생들에게도 의미 있는 결과를 제공할 수 있어야 한다.

한편, 학생들의 성장 과정이나 변화에 주목하면서 수학 학습부진을 다룬 연구들도 존재한다 (Ko & Lee, 2006; Lim & Chang, 2018 등). Lim & Chang(2018)은 초등수학의 수와 연산 영역에서 부진을 경험한 학생을 대상으로 중학교 1학년의 대수 학습을 수행한 이후에 산술적 사고 수준의 변화와 대수적 사고로의 이행 양상을 분석하였다. 그 결과 일반화, 문자 기호의 이해와 사용, 추론 측면에서 대수적 사고의 특징을 확인하였으며, 산술적 사고의 관점에서 수와 연산 영역의 시사점을 도출하였다. 그러나 이러한 연구는 소수의 부진 학생만을 대상으로 한 연구이며 일반학급에 일반화하여 적용하기는 어렵다는 한계가 있다.

교과서에서는 대수 절차를 압축하여 간결하게 기술함으로써 학생이 기억하기 쉽고 자동화 가능하다는 장점이 있다. 하지만 간결한 수학적 표현을 이해하지 못한다면 위계성이 강한 수학의 특성으로 인하여 이후의 학습에서 공백이 발생할 우려가 크다.

이러한 이유로 일반 학급에서 수업을 실행하였을 때, 학업 성취수준이 낮은 학생들은 지속성과 자기주도성이 부족하기에 공백이 발생하는 순간 학습을 포기해버리는 경향이 강하다. 따라서 수학 성취도가 낮은 학생들을 포함하여 모든 학생들에게 의미를 제공할 수 있는 교육 프로그램의 개발이 요구된다. Watson & De Geest(2012)는 성취수준에 따라 필요한 비계의 수가 다르다고 주장한다. 곧, 강을 건너기 위해 필요한 징검다리의 수는 아이들의 보폭에 따라 다르다. 따라서 징검다리를 촘촘하게 제공한다면, 보폭이 좁은 아이들은 징검다리를 많이 선택하여 강을 건널 수 있을 것이고, 보폭이 넓은 아이들은 제공된 징검다리 중에서 일부를 생략하여 보다 빨리 강을 건널 수 있을 것이다. 즉, 학생들이 자신의 능력에 맞게 징검다리를 선택할 수 있도록 수업을 상세화하여 설계한다면 모두를 위한 수업이 가능할 것이며, 지속적인 비계설정도 가능하다.

이를 위해 본 연구에서는 중학교 교실에서 대수적 절차의 상세화를 통한 학습 효과를 확인하고자 한다. 성취수준에 따라 비계설정이 개별화 가능하도록 대수 알고리즘을 상세화하였으며, 이를 바탕으로 성취수준에 따른 효과를 분석하고자 한다.

II. 이론적 배경

이 장에서는 다양한 수준이 혼합된 학급의 학생들을 대상으로 대수 수업에 적용할 수 있는 수업 설계에 대해 논의하고자 한다.

이를 위해 관련 선행연구를 분석하고, 이를 바탕으로 대수 알고리즘을 상세화하기 위한 분석틀을 도출하여 지도 방안을 탐색하고자 한다.

1. 수업 설계 틀을 위한 선행연구

Watson & De Geest(2012)는 중등학교 세 곳에

서 3년에 걸쳐 장기간의 수업을 분석하였으며, 이를 바탕으로 PLAS(Previously Low Attainment Student)를 포함한 모든 학생에게 효과적인 수학 수업의 특징을 설명하였다. 연구진과 참여 교사들은 다양한 수준의 학생이 존재하는 학급에서 수학 부진을 포함한 “모든 학생이 수학을 더 잘 배울 수 있다”는 신념을 공유하였다. 곧, 다양한 수준의 학습자가 동일한 교실에서 동일한 수학 내용을 학습하는 것이 중요하다고 보았다. 따라서 PLAS만을 위해 과제를 단순화하여 제공하는 것은 적절하지 않다고 설명한다. 또한 기술, 정의, 개념, 절차 등 수학 내용을 늘이는 학습보다는, 수학적 사고 촉진을 위한 참여 기회를 지속해서 확장해주는 방법에 주력하였다.

유사해 보이지만 미묘한 차이가 있는 교실 현상에서 효과적인 수업을 찾는 것은 연구진에게 도전 과제였다. 분석 방법을 정교화 하는 과정에서 연구진은 수업 과제의 복합성(complexity), 세부과제(microtasks)의 배열, 수업 내용과의 일관성(coherence)에 주목하였다.

첫째, 일반적으로 수업 과제는 개념, 내용, 절차, 학습경험 등의 측면에서 복합적이다. 따라서 학생들은 과제에 도달하기 위한 핵심적인 개념을 연결시키는 데 어려움을 겪게 된다. 새로운 사고방법, 레퍼토리 확장, 자신감, 구조적인 이해를 돕기 위한 비계설정 전략(scaffolding strategies)을 학생들에게 제공할 필요가 있으며, 구체적인 방법은 다음과 같다.

- 새로운 사고방법을 위한 비계설정: 큰 소리로 말하면서 수학에 대해 생각하기, 답을 추측할 수 없지만 현재 이해로 추론할 수 있는 문제 제기하기, 오답에 대해 비평하기, 방법의 효과를 상상해 보기
- 레퍼토리 확장을 위한 비계설정: 다른 방법의 비교, 선택의 결과 평가, 학습된 방법을 연결하여 여러 단계의 문제를 해결하는 방법, 다양한 표현 강조, 하나 이상의 예 또는 비전형적인 예를 요구, 특수한 대상 대신에 류(classes)에 대해 생각하기
- 자신감을 갖도록 하기 위한 비계설정: 고도로 어려운 아이디어와 예를 이용할 수 있게 하기, 지식의 원천으로서 어려움 토론, 탐구를 조직하기 위해 판이나 격자나 배치를 사용한 틀 작성, 어려운 예제의 구성 요구
- 구조적 이해를 위한 비계설정: 관계와 체계적인 변이에 초점 맞추기, 매개변수의 개수를 한 개에서부터 두 개, 세 개로 증가시키기, 적절한 일반화에 이르도록 격려하기(Watson & De Geest, 2012, pp.226-227)

PLAS와 그 외 학생들은 학습경험에서 사용되는 비계설정의 복합성에 차이가 있었다. 다시 말해, 똑같은 학습목표에 도달하기까지 PLAS에게는 더 많은 비계가 제공될 필요가 있었으며, 성취수준이 높은 학생일수록 필요한 비계의 수는 감소하였다. 즉, 연구에 참여했던 교사들은 PLAS와 그 외 학생들에게서 보이는 이러한 차이를 고려하여 PLAS를 위한 비계를 풍부하게 제공하였다. 반면, 일반 교사들은 PLAS에게 제공하여야 하는 비계에 주목하지 못하고 과제를 단순화하여 제시하는 데 그쳤다.

둘째, 세부과제는 학습 경로를 안내하는 역할을 한다. 따라서 학생들은 세부과제에 따라 수학에 보다 적극적으로 참여할 수 있다. PLAS에게 세부과제의 세세한 배열을 제공할 필요가 있다. 그 외 학생들은 배열 순서를 모두 따르지 않더라도, 세부과제는 학습목표별로 범주화하여 제공될 수 있다.

PLAS 학생들은 세부과제에 의해 수학적 아이디어에 대한 참여가 달라졌다. 이를 통해 교사가 세부과제를 어떻게 조직하고 배열할지에 주목하였다. 세부과제는 서로 연결되도록 조율되었다.

곧, 각각의 세부과제는 다음의 세부과제에 도움을 주며 확장된 학습경험으로 축적될 수 있도록 하였다. 연구진은 수학적 사고, 참여, 협력, 수학적 도전을 발전시키는 방법을 강조하고 수학적 아이디어를 경험하는 구조화된 과제를 사용하였다. 확장된 과제의 경우 교사의 도움으로 세부과제를 배열하여 학생들도 접근 가능하도록 하였다. 교사는 이러한 세부과제를 전체 그룹 또는 개인에게 제공하였다. 그리고 개인이나 그룹의 결과물은 전체 학급 수업에서 공적으로 이용할 수 있는 질문과 도움이 되어 수학적 아이디어를 정리하도록 발전시키는 데 활용되었다.

마지막으로 교육과정 내용은 수업에서 일관성 있게 이용할 수 있어야 한다. 교사는 세부과제의 배열을 통해 수학적 일관성을 유지하려고 하였다. 한 시간 수업에서 실행될 수 있는 수학적 행동은 학습목표에 따라 범주화하였으며, 관련 개념을 기억하고 준비하기, 정교화하기, 개념에 주목하기, 개념에 따라 실행하기, 종합하기, 대상화하기 등으로 정리하였다. 수업 순서에 따라 세부과제를 배열했으나, 실제 과정은 학습이 실행됨에 따라 피드백되고 재조정되는 매우 복잡 미묘한 것이었다. 연구진은 교사가 세부과제의 배열에 따라 개념에 관한 개인적이고 협력적인 학생들의 참여를 유도하고 조율하였음을 확인하였다. 세부과제로 제공되는 학습 기회는 수학적 일관성에 따라 다양하였다. 예를 들어, 수업 초반에는 학생들이 내용을 받아들일 준비를 하도록 도움을 주었으며, 수업 후반에는 개념에 관한 스스로의 예를 구성하게 하고 더 복잡한 상황에서 개념을 적용해 보도록 하였다. PLAS와 그 외 학생들은 수학적 대상과 아이디어에 참여하려고 노력하였다.

Watson & De Geest(2012)는 수학수업에서 세부과제의 배열이 수학적 참여의 본질을 드러낸다고 논의하면서 이를 설명하는 수업 분석틀을 제시하였다. 분석틀에서 중요한 수학적 구성요소를 7가지로 제시하였으며, (1)교사가 선언적/명목적/사실적/기술적 진술을 추출, (2)학습자가 특정 행동을 보여주기를 바라는 교사의 기대, (3)학습자의 인식/주의에 대한 교사의 지시, (4)교사의 학습자 응답 촉진, (5)토론(예: 적응 절차) (6)수학적 아이디어의 통합 및 연결, (7)긍정(예: 다른 맥락에 적용)이다. 각 구성요소는 ‘학습자에게 무언가를 보여주고, 그 특징을 나타내는 교사와 이에 참여하여 스스로 성질을 찾는 학습자 간의 중요한 변화와 관계’가 뒤따르는 공적인 수학과제 및 도움이 다양하게 포함된다. 예를 들어, 첫 번째 구성에서 교사는 수업 내용을 설명하거나 용어를 정의하기 위해 학생의 생각을 이끌어낸다. 이로써 학생들에게 수학적 대상을 기억하게 한다. 두 번째 구성에서 교사는 절차 따라 하기를 학습자에게 기대하고 이를 통해 학생들이 유창함을 개발할 수 있다. 세 번째 구성에서 교사는 수학적 대상의 속성을 확인하도록 학습자에게 주목하게 하며 이를 통해 학생들의 개념 이해를 증진하는 데 도움이 될 수 있다.

교사들은 사고하기, 레퍼토리, 자신감, 개념적 이해를 위한 비계설정을 통해 적극적인 학생 참여를 유도하였다. 구체적으로 보면, 하나 또는 여러 예와 그 특징에 주목하기, 현행 학습에 대해 토론하고 이를 요약하거나 자세히 설명하기, 관련 학습과 연결시키기, 공적인 예를 구성해 보기, 설명과 가설, 유창성 발달, 회상을 통해, 연구에 참여했던 교사들은 전체 수업에서 수학적 아이디어의 본질을 지향하도록 이끌었다. 특히 참여 교사들은 PLAS만을 위해 과제를 단순화하지 않았다. 예를 들어, 정당화와 연역적 추론을 포함하여 다양한 추론, 현행 학습에 대한 토론, 관련 학습과의 수학 내적 연결성이 이루어졌으

며, PLAS와 그 외 학생들은 수학적 아이디어의 일관된 발달에 참여하였다. 반면, 수업 분석틀에 의해 분석한 결과가 효과적이지 못한 다른 수업에서는 회상하기, 강의하기, 정답 말하기 등과 같은 수업 초반에 설정한 학습목표에만 집중하는 것으로 나타났으며, 전반적인 수업에서 수학적 일관성이 유지되지 못하였다.

이상과 같이 효과적인 교수학적 조치는 세부과제의 배열을 통하여 비계설정 해주는 것이며, 그 결과 다양한 수준의 학생들이 수학적 아이디어에 적극적으로 참여하였음을 알 수 있다. 그동안 성취수준이 낮은 학생들에게 보충과정으로 수준에 맞는 단순한 과제를 주로 제공하면서 수학적 참여를 기대해 왔다. 그러나 세부과제의 배열에 따른 비계설정 전략을 수준에 맞추었더니 PLAS와 그 외 학생들은 수학적으로 일관된 발달을 결합하였기에 실력이 향상될 수 있었다. Watson & De Geest(2012)는 수학수업의 분석틀을 제시하면서 열 방향이 유의미하지 않으며 도구 자체가 하나의 목록이라고 한다. 이는 좋은 수업을 이해하고 설명하기 위해서는 요소별 확인 후에 반드시 통합적 관점으로 파악할 필요가 있음을 의미한다.

이러한 접근은 다양한 수준이 혼합된 교실에서 효과적인 수학학습을 유도하는 방식에 시사하는 바가 크다. 이러한 선행연구를 바탕으로 한 수업설계를 위해 Watson & De Geest(2012, p. 229)의 수학수업에 대한 분석틀을 바탕으로 본 연구자가 *Table* 1과 같이 정리하였다.

본 연구에서 세부과제는 과제의 복합성을 요소분석 하여 수학적 아이디어가 있는 참여와 수학적 도전이 되는 협력을 발전시키도록 학습을 안내하는 징검다리 역할을 한다고 보았으며, 사고하기, 레퍼토리, 자신감, 개념적 이해의 측면에서 수학적으로 일관된 도움을 주도록 비계설정하는 교수학적 조치를 구상하였다. 예를 들어, 대수 단원에서 요소분석을 통해 학생에게 요구되는 과제 요소를 확인할 수 있다. 성취도에 따라 학생들의 인지적 부하가 다르므로 하위 수준에게 과제가 더 복잡하다. 즉, 상위 수준은 필요한 비계가 적은 반면에, 하위 수준은 보다 풍부한 비계설정이 요구된다. 이처럼 교사는 수준별로 적절한 교수학적 조치를 선택할 수 있다.

Patahuddin et al.(2018)은 Watson의 분석틀을 학생 참여 중심으로 변형하였다. 학생이 수행할 수 있는 다양한 활동 관점에서 수학 참여 중에 발생할 수 있는 변화에 관심을 두고, 교사 2인이 변형된 분석틀에 따라 수업을 설계하여 실행했을 때 학생 참여에 어떤 영향을 주는지 분석하였다. 이를 위해 Watson의 요소 중 일부를 결합하여 (1)기억 [RE], (2)개념, 방법, 성질, 관계 및 시사점에 대한 개인적/공적 지향 [PO], (3)수학적 유창성 [MF], (4)합성과 연결 짓기 [MS], (5)엄밀성과 대상화 [RO]와 같이 5개의 요소로 코딩하였다. 이를 바탕으로 학생들이 수학적으로 수행하거나 말한 것을 통해 수행한 수학적 활동 유형을 구별한 결과, 수준에 따라 다양한 수학 참여를 이끌어 낼 수 있었다.

Watson & De Geest(2012)는 교사의 실행에 초점을 둔 반면, Patahuddin et al.(2018)은 교사보다 학생의 수학 참여에 초점을 맞추고 있다. 본 연구에서는 교사의 실천과 학생 참여를 모두 고려한 프로그램을 개발하고 프로그램의 현장적합성을 확인하고자 한다.

2. 산술 대수에서 추상 대수로의 발달

Woo(2017, p. 369)는 산술 계산과 대수 조작의 질적인 차이를 논의하였다. 산술 계산은 대부분의 사람들이 수학 개념을 배우는 초기에 일어나

는 절차이다. 반면, 대수 기호법은 문자와 식의 기호를 조작하는 알고리즘으로 보다 형식적인 절차이다. 대수에서 기계적으로 계산하여 문제를 해결하는 것은 의식적인 추론을 통하지 않고 신속 정확한 처리로 결과를 발견하고 그 타당성을 증명하는 수학적 사고 방법이다.

Sfard(1995)는 산술 계산과 대수 구조의 질적인 차이를 역사적으로 분석하였다. 즉, 산술 계산에서 대수 구조로 발달하면서 조작에서 구조로의 관점 전환이 있었다. 역사적으로 대수는 크게 두 번의 물화(reification)를 거쳤다. 첫 번째 발달은 Viète의 기호 체계를 계기로 이루어졌다. 16세기까지 언어와 생략된 기호가 혼합된 계산 과정이었다. 언어적 대수와 생략적 대수는 구체적인 수

***Table* 1.** Framework for lesson design

열(columns)	비계설정의 교수 전략	비계설정의 세부과제	학습목표
1	교사는 정보적/사실적 진술을 제시하거나 이끌어낸다. (코드: Fact)	-정보 제공 -사실, 정의, 기술에 대해 말해보거나 알아보거나 질문하기 -이를 탐구	-회상하기 -준비하기
	교사가 시연한 후 따라하게 한다. (코드: PERFormance)	-교사를 모방하고 따라하기 -절차 사용 -정답과 해법을 말해보기	-유창성 -정확성
	교사가 지시하여 인식하거나 주목하게 한다. (코드: Social)	-하나 또는 다양한 특징을 가진 대상이나 예를 말해보거나 보여주기 -다양한 대상을 말해보거나 보여주기 -성질 확인 -분류, 비교 -변이 확인 -수행 요약	-개념, 방법, 성질, 관계를 향한 공적인 지향
2	교사가 학생들에게 과제 해결을 시도해 보게 한다. (코드: PERSonal)	-사고하기 -알려진 절차 이외로 정답 찾기 -시각화 -패턴 탐색이나 깨뜨리기 -비교, 분류, 연결 -설명 -가정 -비형식적 추론 -하나 또는 많은 특징을 가진 예제 제시 -의사결정에 적용, 적응	-개념, 방법, 성질, 관계를 향한 개인적 지향
	도출한 결과에 대해 토론하게 한다. (코드: Discussion)	-방법 평가 -변수 바꾸기 -특별하거나 극단적인 경우 -절차 적응 -관계 확인 -귀납 / 예상 -설명/ 정당화 -연역적 추론	-분석하기 -결과와 관계에 주목하기 -이와 관련하여 흥미로운 점은?
3	수학적 아이디어를 통합하고 연결하게 한다. (코드: Generalise)	-아이디어 결합 -일반화 -재설명 -아이디어 요약 -추상화 -형식화 -새로운 정의	-종합 -연결
	알게 된 것을 선언하고 실행에 옮기게 한다. (코드: Apply)	-성질 탐구 -적응/ 변환 -이후에 적용 -발달 평가 -증명	-엄밀성 -사용 -대상화

를 다루는 산술 과정으로 전개되었으며, 조작적인 성질이 있다. 이는 해석기하와 함수적 사고의 등장에 중요한 역할을 하였다.

두 번째는 Peacock이 대수의 형식적인 측면에 주목한 이후에 이루어졌다. 이를 통해 대수는 대상들 간의 관계 곧, 구조에 대한 연구로 발전하였다. 조작적 대수 즉, 언어적, 생략적 대수에서 구조적 대수 즉, 기호적 대수로의 발달 계열을 따른 결과, 대수는 고정된 양, 변하는 양, 의미와 무관한 기호 조작으로 변하였다. 대수의 역사를 정리하면 *Table* 2와 같다.

***Table* 2.** History of algebra

<table>
<tr><th>대수</th><th>특징</th><th>주요 사항</th><th>표현</th><th>역사</th></tr>
<tr><td rowspan="3">일반화된 산술</td><td>조작적</td><td>수치, 계산 중심</td><td>일상 언어 표현 (언어적 대수, 생략적 대수의 초기)</td><td>Diophantos 이전</td></tr>
<tr><td rowspan="2">구조적</td><td>계산 결과 중심 (고정된 값에 대한 대수)</td><td>기호 표현 (고정된 미지수로 사용되는 변수)</td><td>Diophantos 이후</td></tr>
<tr><td>함수적 대수</td><td>기호 표현 (변하는 양으로 사용되는 변수)</td><td>Viète 이후</td></tr>
<tr><td rowspan="2">추상 대수</td><td>조작적</td><td>여러 가지 기호 조작 (조작의 조합)</td><td>기호 표현 (문자에 의미를 부여하지 않는 변수)</td><td>Peacock 이후</td></tr>
<tr><td>구조적</td><td>추상적 구조</td><td>기호 표현 (임의 대상, 임의 기호)</td><td>19~20세기 군, 환, 체, 선형대수</td></tr>
</table>

일반화된 산술에서 추상 대수로 이행할 때 인지적 장벽이 존재한다. 또한 조작적 대수에서 구조적 대수로 이행할 때에도 장벽이 존재한다. 따라서 기호 대수가 학생들에게 조작 가능하도록 일반화된 산술의 조작에서 구조로 접근하는 교수학적 조치가 필요하다. 예를 들어, $2a-b-3a+2b$에서 생략적 대수를 위해 사과(a)와 바나나(b)와 같이 문자 의미를 해석하는 방법이 요구된다. 즉, 사과(a) 두 개를 얻었다가 세 개를 잃고 바나나(b) 한 개를 잃었다가 두 개를 얻었다는 설명은 '조작적 방식'을 따른 것이다.

기호 조작을 도구적으로 이해한 학생이나 이미 절차가 자동화된 학생 모두에게 대수 조작에 대한 통찰이 필요하다. 대수 조작 활동은 산술 계산에서 대수 구조로 진행하는 중간 단계라고 할 수 있다. 예컨대, 지수법칙 $a^2\times a^3=a^5$에서 지수끼리 더한다는 것은 대수 구조이지만, 이를 설명하기 위해 $(a\times a)\times(a\times a\times a)$와 같은 대수 조작이 필요하다. 이처럼 대수 조작 활동을 풍부하게 하면 통찰이 이루어질 수 있다

Table 2에 따르면, 대수 처리를 위해 조작에서 출발하여 구조로 관점을 전환해야 한다. 새로운 수학 개념을 배우는 첫 단계에서는 '조작적 방식'을 따라야 한다. 정해진 양에서 변하는 양을 다루는 양적 추론 과정을 길게 거쳐서 학생들은 의미와 무관한 기호 조작을 할 수 있게 된다.

이를 수업설계에 적용하기 위해 대수 공식을 세부과제로 제시하는 방법을 찾을 필요가 있다. 대수는 역사적으로 여러 차례 비약적인 발달 과정을 거치면서 조작에서 구조로 가는 연결 고리가 빈약해졌다. 초기에는 기호 대수보다 일반화된 산술에 지나지 않았다. 산술적인 맥락에서 조작 가능하고 일상 언어와 구분되지 않았으며, 기호 사용의 논리적인 근거를 확보하지 않은 채로 기호를 사용하였다. 이처럼 예비 대수 관념의 조작 가능성은 대수 학습과정에도 활용될 필요가 있다. 초등 교과서에는 대수 조작이 가능하도록 많은 사례를 들지만, 중등 교과서는 일반화한 관계를 압축하여 다루고 있다. 예를 들어, 다각형의 대각선을 다룰 때, 초등 교과서에서는 사각형, 오각형, 육각형 등을 차례로 살펴본다. 반면,

중학교 교과서에서는 n각형으로 일반화하면서 한 꼭짓점에서 대각선의 개수, 모든 대각선의 개수, 이때 중복되는 이유를 논리적인 근거를 들어 설명하도록 강조한다. n각형을 다루기 이전에 사각형, 오각형, 육각형 등의 사례는 조작 가능한 관계를 찾는 징검다리 역할을 할 수 있는 것이다.

III. 연구방법

본 연구의 목적은 중학교 2학년 문자와 식 영역에서 대수 알고리즘의 상세화에 따른 학습의 효과를 확인하고, 이에 대한 현장 적용가능성을 탐색하는 것이다.

최근 학교 현장에서는 ‘기초 학력 책임교육’이라는 목표 아래, 수학을 잘하지 못하는 학생들의 가능성을 열어 두고 자신감을 살려주기 위해 성취도가 하위 수준인 학생들을 소위 ‘천천히 배우는 학생’으로 칭하고 있다. 이하에서도 하위 30% 이하의 학생들을 ‘천천히 배우는 학생’이라 하겠다. 이 장에서는 연구방법을 제시한다.

1. 수업 설계

Table 1과 *Table* 2를 바탕으로 대수 알고리즘을 상세화 하였으며, 교수학적 조치를 실제 중학교 수학 수업시간에 투입하도록 수업을 설계하였다. 우선 현행 교과서에서 문자와 식 영역의 내용체계를 확인하였다. 연구대상 학교의 학사일정에 따라 수행평가와 중간 및 기말 지필평가를 그대로 활용하여 학습의 효과를 확인해야 했기 때문에, 수학교육 전문가들과의 협의를 통해 시험범위 내의 대수 알고리즘을 교과서에서 추출하였다. 이를 정리하면 *Table* 3과 같다.

***Table* 3.** System of algebra

이전 학습		중학교 2학년		이후 학습
문자의 사용과 식의 계산		지수법칙		다항식의 곱셈과 인수분해
		단항식의 곱셈과 나눗셈		
		다항식의 계산		
일차방정식	➡	연립일차방정식	➡	이차방정식
		연립일차방정식과 문제해결		여러 가지 방정식
		부등식과 그 해		여러 가지 부등식
		일차부등식과 문제해결		부등식의 영역

문자는 수량 관계를 명확하고 간결하게 표현하는 수학적 언어이다(Ministry of Education, 2015, p. 30). 언어는 모방과 반복을 통해 문법에 따른 용법을 제대로 익혔을 때, 문제해결에 활용 가능한 도구가 된다. 수학을 잘하는 학생들은 무리 없이 규칙을 그대로 받아들일 수 있으나, 천천히 배우는 학생들은 규약을 받아들이는 데 어려움을 겪으면서 문자를 포함한 식의 계산을 어려워한다. 대수를 기호 조작으로만 해석하면 학생들의 삶과 동떨어지게 된다. 교수학적 조치는 비록 수학적이지 못하더라도 기호 조작의 의미를 학습자 나름대로 찾아보도록 유도하는 것이었다.

교과서에서는 공식을 이용하여 풀면서 원리를 설명하도록 의도하지만, 학교현장에서 단순히 식의 값을 구하는 계산에 치우치는 경향이 있다(Jang et al., 2019, p. 111). 그 결과, *Table* 3과 관련하여 천천히 배우는 학생들은 이전 학습에서 유리수의 뺄셈, 분배법칙이나 동류항의 계산 등에 대해 커다란 학습 결손을 보여주었다. 그렇다고 하더라도 이전 학습의 보충에만 머물러 있으면 시험 점수에 실제 반영되기까지 천천히 배우

는 학생들은 너무 오랜 경로를 버텨야 한다. 교수학적 조치는 목표를 낮추어 잡고 한 단계라도 나아지는 방향으로 학습자의 자신감을 되살리고자 의도하였으며, 이전 학습을 포괄하여 핵심을 정확하게 짚어서 효율적으로 반복 연습시키는 방안을 찾고자 하였다.

Table 1에 따라 차시별로 교과서 내용을 분석하고, 관련 대수 알고리즘을 보다 상세화하는 세부과제로 배열하였다. 한 시간 수업에서 수학적 행동의 실행은 교사가 학습자에게 시범을 보여주고 그 특징을 표현하면, 학습자가 스스로 관련 성질을 찾는 데 참여하면서 뒤따르는 다양한 변화와 관련된다. 세부과제는 이러한 학습 경로를 안내하는 역할을 하며, 특히 학습자에게 새로운 사고방법, 레퍼토리 확장, 자신감, 개념적 이해를 돕기 위한 비계설정을 하였다. 비계설정 전략의 예를 제시하면 다음과 같다.

첫째, '곱하기 역수(×(역수))'가 되는 나눗셈 알고리즘을 상세화하여 '분수 꼴의 분모와 약분' 절차로 새롭게 사고하도록 일관성 있게 안내하였다. 식의 계산에서 나눗셈은 곱셈의 역연산으로 처리한다. 이와 관련하여 방정식의 양변에서 나눗셈에 대한 등식의 성질도 같은 원리이다. 즉, 방정식 $ax=b$꼴에서도 등식의 성질을 이용하는 대수 절차를 일관성 있게 조작하도록 하였다. 학생들은 방정식의 양변에 같은 연산을 수행하는 이유를 이해하지 못하였다. 이처럼 이해가 완전하지 않고 모호한 경우 산술과 관련시켜서 상세화한 절차와 조작을 숙달할 수 있도록 반복시켰다.

둘째, 동류항 계산 알고리즘을 상세화하여 생략적 대수로 의미를 부여하고 시각적 표상과 함께 제시하여 레퍼토리를 확장하도록 안내하였다. 사과(a)와 바나나(b)와 같이 시각적 장치와 함께 문자 의미를 담게 하였으며, 일반화된 산술로 환원하도록 지속적으로 기대하였다. 이처럼 현실 맥락을 이용하지는 않지만 조작의 의미와 방법을 언어적으로 설명하고, 시각적으로 파악할 수 있도록 하는 장치를 추가하였다.

셋째, 분배법칙 알고리즘을 상세화하여 '부호, 곱셈구구, 문자'와 같이 순서를 쉽게 조직하여 자신감을 키우도록 안내하였다. 이처럼 상세화한 조작에 순서를 부여하여 세부과제를 배열하였다.

넷째, 지수법칙 알고리즘을 상세화하여 밑과 지수를 혼동하지 않도록 구조적인 이해를 안내하였다. $a^m \times a^n$ 은 '밑의 개수만큼 곱셈'으로 보다 풀어헤친 상세 절차를 반복시켰다. 이처럼 교과서에 제시된 절차를 보다 상세히 풀어서 설명하였다. 이를 정리하면 *Figure* 1과 같다.

수학교실에서 수학을 지식으로 소유할 것이 아니라, 거기에 도달했을 때 누구나 기쁨을 느낄 수 있어야 한다. 천천히 배우는 학생들도 수학학습을 통해 변할 수 있으며, 이들을 가르치는 방식도 변화해야 한다. 대수의 결과만을 진부하고 경직되게 가르칠 것이 아니라, 호기심을 유발하는 방향으로 학습자가 조작 가능하게 만들어야 한다. 천천히 배우는 학생들은 모방 기술이 부족하여 반복절차가 반드시 요구되며, 보다 상세화한 절차가 필요하다. 또한 교실에서는 아무리 수학적이라 할지라도 학생들이 받아들이지 못하면 효과가 없는 반면, 아무리 비형식적이라 할지라도 학생들이 수용한다면 의미가 있다고 볼 수 있다. 초반에는 원리를 잘 모르더라도, 산술과 관련시켜 대수 알고리즘을 계속 사용하면서 이해가 점차 깊어지기도 한다.

반면, 수학을 잘하는 학생들을 위해 세부 절차를 따르는 반복학습을 굳이 할 필요가 없다는 조치를 해야 한다. 그리하여 모든 학생들에게 비계설정을 위한 세부과제의 배열을 무조건 따르라고 강요하지 않았다. 수학을 잘하는 학생들은

<table>
<tr><th>교과서 설명</th><th>교수학적 조치</th></tr>
<tr><td>참고
$A \div B = A \times \frac{1}{B}$
$A \div B = \frac{A}{B}$
$24ab \div 6a = 24ab \times \frac{1}{6a} = 24 \times \frac{1}{6} \times ab \times \frac{1}{a} = 4b$
$24ab \div 6a = \frac{24ab}{6a} = \frac{24}{6} \times \frac{ab}{a} = 4b$
이와 같이 단항식의 나눗셈은 나눗셈을 곱셈으로 고치거나 분수 꼴로 나타낸 다음 계수는 계수끼리, 문자는 문자끼리 계산한다.
(Jang et al., Math 1, p.35)</td><td>· 새로운 사고방법의 상세화: 이해가 모호한 상태에서 상세화한 절차와 조작을 숙달하도록 반복함.
예1) • 단항식의 곱셈은 분자에, 나눗셈은 분모에 쓴다.
$(24ab) \div 6a = \frac{24ab}{6a} = \frac{24}{6} \times \frac{a \times b}{a} = 4 \times b = 4b$</td></tr>
<tr><td>③에서 ④를 변끼리 빼면
$-17y = -17,\ y = 1$
(Jang et al., Math 2, p.79)</td><td>예2) 방정식의 계수는 나누기 분모로 처리한다.
$\frac{-17y}{-17} = \frac{-17y}{-17},\ y = 1$</td></tr>
<tr><td>(1) $(3a+2b)+(2a-3b)$
$= 3a+2b+2a-3b$
$= 3a+2a+2b-3b$
$= \square - b$
$\begin{array}{rrr} & 3a & +2b \\ +) & 2a & -3b \\ \hline & \square & -\ b \end{array}$
(2) $(5x+2y-3)-(3x-y+4)$
$= 5x+2y-3-3x+y-4$
$= 5x-3x+2y+y-3-4$
$= 2x+\square-7$
$\begin{array}{rrrr} & 5x+ & 2y & -3 \\ -) & 3x- & y & +4 \\ \hline & 2x+ & \square & -7 \end{array}$
(Jang et al., Math 2, p.40)</td><td>· 레퍼토리 확장의 상세화: 조작의 의미와 방법을 파악하도록 언어적인 설명을 상세화하고 시각적인 장치를 추가함.
예) 사과(a) 세 개와 바나나(b) 두 개를 얻고 사과 두 개를 더 얻었지만 바나나 세 개를 잃었다.
• 다항식의 덧셈과 뺄셈은 괄호를 풀고 동류항끼리 계산한다.
$(3a+2b)+(2a-3b) = 3a+2b+2a-3b = 3a+2a+2b-3b = (3+2)a+(2-3)b = 5a+(-1)b = 5a-b$
$(5x+2y-3)-(3x-y+4) = 5x+2y-3-3x+y-4 = 5x-3x+2y+y-3-4 = (5-3)x+(2+1)y-3-4 = 2x+3y-7$</td></tr>
<tr><td>(1) $2(x+3) = \square \times x + 2 \times \square$
$= 2x + \square$
(2) $(6x-9) \div 3 = (6x-9) \times \frac{1}{\square}$
(Jang et al., Math 1, p.82)</td><td>· 자신감 증대의 상세화: 조작 순서를 부여함.
예) 분배법칙은 부호, 곱셈구구, 문자의 3단계로 풀도록 한다.</td></tr>
<tr><td>$a^2 \times a^3 = \underbrace{(a \times a)}_{2개} \times \underbrace{(a \times a \times a)}_{3개}$
$= \underbrace{a \times a \times a \times a \times a}_{5개} = a^5$
지수의 합
$a^2 \times a^3 = a^{2+3}$
$(a^5)^3 = a^5 \times a^5 \times a^5$
$= a^{5+5+5} = a^{15}$
지수의 곱
$(a^5)^3 = a^{5 \times 3}$
(Jang et al., Math 2, pp.28-29)</td><td>· 개념적 이해의 상세화: 보다 세부적인 절차와 조작을 반복하여 숙달하게 함.
예)
• 지수는 밑의 개수만큼 곱셈으로 나타낸다.
$a^3 \times a^4 = (a \times a \times a) \times (a \times a \times a \times a) = a^7$
$(a^2)^3 = (a \times a) \times (a \times a) \times (a \times a) = a^6$</td></tr>
</table>

***Figure* 1.** Example of instructional treatment

세부과제의 배열 순서를 모두 따르지 않더라도 학습목표에 도달할 수 있기 때문이다. 수학을 잘하는 학생들은 추상 대상을 완전히 수용하기 이전에 기계적으로 자동화하여 제대로 사용하고 있되, 계속 사용하다보면 물화에까지 도달한다고 기대할 수 있다. 수학을 잘하는 학생들에게도 세

부 절차는 아니더라도 연습은 필요한 것이며, 같은 교실 내에 비계설정을 다양하게 두는 수준별 수업이 가능하다고 볼 수 있다.

그러므로 본 연구에서 수업설계의 의도는 학생들이 누구나 접근 가능하도록 세부과제를 배열함으로써 대수 학습을 돕는 것이었다. 다양한 비계설정을 제공함으로써 학생들에게 선택 가능하도록 하였다. 이는 기존 수준별 수업의 실행에서 보충 과정으로 단순화한 과제만을 별도로 제공했던 것과 대조적이라는 의의가 있다.

수업 실행은 다소 비형식적이더라도 산술에서 대수로 이행하는 과정을 의미 있게 제시하고자 하였다. 설계된 수업의 적용은 실험반과 비교반으로 구분하여 진행하였다. 연구자가 교수학적 조치의 의도를 파악하고 있으므로 실험반을 가르치고, 동료 교사 2명이 비교반을 가르쳤다. 이들은 모두 교직 경력이 20년 이상으로 경험이 풍부하였다.

비교집단에는 수준별 문제를 보충, 기본, 심화로 제공하였다. 교과서에 반영된 교육과정 의도대로 학습의 개인차를 인정하고 천천히 배우는 학생들에게 기본개념을 좀 더 배우고 익히게 하려는 것이었다. 천천히 배우는 학생들에게 별도로 단순화한 보충 과제를 부여하였으며, 이전 학습에서 두드러진 학습결손을 보이는 유리수의 뺄셈을 복습하게 하고 분배법칙이나 동류항계산 중에 쉽고 단순한 연산문제만 뽑아서 반복 연습하게 하였다. 또한 현행 학습도 난이도 낮은 과제를 추가로 제공하였다. 그 외 학생들은 기본, 심화 문제를 부여하고 보충 문제는 선택적으로 해결하도록 유도하였다.

중학교 교육과정에서 문자와 식 영역은 4월부터 1학기 내내 다룬다. 대수 알고리즘을 상세화한 교수학적 조치는 교육과정 시수 내에서 이루어졌다. 더구나 연구 대상을 중학교 2학년으로 하였는데, 그 이유는 효과 분석에 영향을 미치지 않도록 지필평가를 그대로 활용하기 위함이었다. 또한 중학교 2학년 대수는 예비적인 1학년 대수와 본격적인 3학년 대수의 연결점이라고 판단하였다. 1학년 대수에서는 음수의 부호 규칙을 다루고 등식의 성질로 일차방정식을 풀지만 양적 추론의 산술 맥락과 방식이 여전히 남아 있다. 그에 비해, 2학년 대수에서는 지수법칙, 다항식의 덧셈과 뺄셈, 단항식과 다항식의 나눗셈, 연립방정식, 일차부등식 등을 보다 형식화한 대수 맥락에서 다룬다고 볼 수 있다. 천천히 배우는 학생들은 형식적인 대수의 의미와 절차를 매우 어려워하므로, 조작 가능한 반복훈련을 통해 일관성 있는 수학적 참여를 유도하기에 적절하다고 판단하였다.

예를 들어, 지수법칙에서 형식화된 공식 대신에, 그 의미를 풀어서 써보는 반복훈련을 유도하였다. 그리하여 형식화한 결과를 곧바로 이용하지 않고 원리에 따른 과정을 산술과 관련시켜 계속 밟아나가도록 학생들에게 강조하였다.

2. 연구 참여자

연구 참여자는 A중학교 2학년 151명이었다. A중학교는 강원도 군 소재지에 위치하고 있으며, 2학년은 8개 학급의 185명으로 구성되어 있다. 학생들의 수학 학업성취도는 전국단위로 비교했을 때 중하 정도로 판단된다. 학부모들은 수학과목에 대한 교육열이 높은 편이며, 사교육 의존도가 높은 편이다. 이 지역의 사교육은 교육과정 수준에서 크게 벗어나지 않으며 지나치게 심화나 속진은 아니다.

사전검사의 성적이 0점인 경우를 무응답으로 배제한 결과, 연구 참여자는 151명 추출되었다. 그 중에서 비교집단은 5학급의 95명이며, 실험집

단은 3학급의 56명이었다. 비교반은 담당 수학교사들이 교과서를 이용하여 평소대로 가르쳤다. 실험반은 본 연구자가 담당하였으며, 교수학적 조치에 따라 수업을 진행하였다. 두 집단은 사전검사의 성적을 기준으로 하여 상 집단(A)을 70점 이상, 하 집단(C)을 40점 이하, 나머지를 중 집단(B)으로 각각 구분하였다. 그 결과, 통계 분석 대상은 *Table* 4와 같았다.

***Table* 4.** Research participants

	A	B	C	참여자(명)
비교반	56	18	21	95
실험반	26	13	17	56
전체				151

정성적 분석 대상자는 실험집단에 속하는 학생들 중에서 사후검사에 유의미한 해법을 제시한 경우를 선발하였다. 이들은 수학 학업성취도가 높지 않지만, 평소 수업에서 의사소통이 활발하며 발표 활동에도 적극적으로 참여하는 특징을 지녔다. 또한 수업에 착실하게 참여하고 교사의 지시를 모방하려고 노력하는 학생들이어서 이들은 2학년 1학기 동안에 대수 기초 기능을 꾸준히 향상시켰다고 볼 수 있다. 따라서 교수학적 조치의 학습 효과를 확인하기에 적절하다고 판단하였다.

3. 분석 도구

사전검사는 학기 초부터 4월 중순까지 배운 대수 계산을 중심으로 10문항을 출제하여 10점씩 배점한 수행평가였다. 사전검사에서 우선 평균 점수를 살펴보았으며, 모든 수준에서 비교반이 실험반의 평균보다 높음을 확인하였다. 교수학적 조치에 따른 변화 양상을 확인하기 위해 두 차례에 걸쳐 집단 간 차이를 살펴보았다.

1차 실험을 위해 4월 수학 시간 동안에 대수 알고리즘의 상세화에 따른 교수학적 조치를 하였다. 사후검사1은 대수 문항을 43.5점으로 배점한 중간고사 지필평가였으며, 각 문항별 분석 결과는 *Figure* 2와 같다. 교수학적 조치의 효과는 해당 문항 평균 변화의 차이에 따라 확인하였다.

문항 번호	내용영역	성취기준	난이도			배점	정답
			어려움	보통	쉬움		
6	지수법칙	[9수02-06]지수법칙을 이해한다.			○	4	3
7	단항식 나눗셈	[9수02-08] '(단항식)×(다항식)', '(다항식)÷(단항식)'과 같은 곱셈과 나눗셈의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.		○		4	2
8	단항식의 곱셈나눗셈	[9수02-08] '(단항식)×(다항식)', '(다항식)÷(단항식)'과 같은 곱셈과 나눗셈의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.			○	4	1
9	괄호가 들어간 다항식	[9수02-07]다항식의 덧셈과 뺄셈의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.			○	4	4
10	다항식의 계산	[9수02-08] '(단항식)×(다항식)', '(다항식)÷(단항식)'과 같은 곱셈과 나눗셈의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.	○			4.5	5
서술형 문항							
4	지수법칙	[9수02-06]지수법칙을 이해한다.		○		5	0
5	다항식의 뺄셈	[9수02-07]다항식의 덧셈과 뺄셈의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.			○	5	0
6	다항식의 계산	[9수02-07]다항식의 덧셈과 뺄셈의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.		○		6	0
7	다항식의 계산	[9수02-07]다항식의 덧셈과 뺄셈의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.		○		7	0
총합계			1	4	4	43.50	-

***Figure* 2.** Post test1

2차 실험을 위해 5월부터 7월 사이에 상세화한 대수의 교수학적 조치를 실시하여 실험집단에 투입 시간을 보다 길게 확보하였다. 사후검사2는 대수 문항으로 출제한 기말고사 지필평가였다. 일차함수 내용도 식의 계산 및 미지수가 2개인 일차방정식과 연계되므로 대수 절차로 포함시켰다. 사후검사2는 100점으로 배점하였으며, 각 문항별 분석 결과는 *Figure* 3과 같다.

문항번호	내용영역	성취기준	난이도			배점	정답
			어려움	보통	쉬움		
선택형 문항							
1	일차부등식과 문제해결	[9수02-10]일차부등식을 풀 수 있고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.			○	3.5	2
2	일차부등식과 문제해결	[9수02-10]일차부등식을 풀 수 있고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.	○			5	4
3	일차부등식과 문제해결	[9수02-10]일차부등식을 풀 수 있고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.		○		4.5	4
4	연립일차방정식	[9수02-11]미지수가 2개인 연립일차방정식을 풀 수 있고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.			○	3.5	5
5	연립일차방정식	[9수02-11]미지수가 2개인 연립일차방정식을 풀 수 있고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.			○	3.5	2
6	연립일차방정식	[9수02-11]미지수가 2개인 연립일차방정식을 풀 수 있고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.		○		4	3
7	연립일차방정식과 문제해결	[9수02-11]미지수가 2개인 연립일차방정식을 풀 수 있고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.		○		4	4
8	연립일차방정식과 문제해결	[9수02-11]미지수가 2개인 연립일차방정식을 풀 수 있고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.	○			5	3
9	함수와 함숫값	[9수03-05]일차함수의 의미를 이해하고, 그 그래프를 그릴 수 있다.			○	3.5	1
10	일차함수와 그 그래프	[9수03-05]일차함수의 의미를 이해하고, 그 그래프를 그릴 수 있다.		○		4.5	5
11	일차함수와 그 그래프	[9수03-05]일차함수의 의미를 이해하고, 그 그래프를 그릴 수 있다.		○		4.5	1
12	일차함수와 그 그래프	[9수03-05]일차함수의 의미를 이해하고, 그 그래프를 그릴 수 있다.		○		4.5	4
서술형 문항							
1	일차부등식의 해	[9수02-10]일차부등식을 풀 수 있고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.			○	6	채점기준표참고
2	일차부등식과 문제해결	[9수02-10]일차부등식을 풀 수 있고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.	○			5	채점기준표참고
3	연립일차방정식	[9수02-11]미지수가 2개인 연립일차방정식을 풀 수 있고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.			○	4	채점기준표참고
4	연립일차방정식과 문제해결	[9수02-11]미지수가 2개인 연립일차방정식을 풀 수 있고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.		○		6	채점기준표참고
5	연립일차방정식과 문제해결	[9수02-11]미지수가 2개인 연립일차방정식을 풀 수 있고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.		○		5	채점기준표참고
6	일차함수와 그 그래프	[9수03-05]일차함수의 의미를 이해하고, 그 그래프를 그릴 수 있다.			○	6	채점기준표참고
7	일차함수와 그 그래프	[9수03-05]일차함수의 의미를 이해하고, 그 그래프를 그릴 수 있다.		○		6	채점기준표참고
8	일차함수와 그 그래프	[9수03-05]일차함수의 의미를 이해하고, 그 그래프를 그릴 수 있다.			○	6	채점기준표참고
총합계			3	9	8	100.00	-

***Figure* 3.** Post test2

4. 분석 방법

t검정(t-test)은 주로 동질집단인 두 집단 간의 평균에 차이가 있는지 여부를 검증하기 위해 사용된다. 실험반과 비교반은 무선할당이어야 독립변인만이 종속변인에 작용한다. 그러나 현실적으로 종속변인에 영향을 줄 수 있는 모든 요인을 파악하기 어려우며 이를 통제하기도 어려우며, 학교 현장연구에서는 반 편성을 그대로 유지하여 실험반과 비교반을 구분할 경우가 많다. 이때 실험 전에 사전검사부터 평균의 차이가 발생하는 경우가 많다. 따라서 두 집단이 동질집단인지 여부를 확인해야 한다. 이에 따라 통계 분석 절차는 네 단계로 실시한다.

첫째, 사전검사에 대해 평균의 동일성과 등분산성은 t검정을 통해 살펴보고자 한다. 정규성은 실험반과 비교반의 집단별 사례수가 30이상이므로, 중심극한정리를 적용할 수 있다(Yoo & Yoo, 2012).

본 연구의 귀무가설은 “집단과 교수법이 수학성적에 유의한 영향을 미치지 않는다” 이며, 대립가설은 “집단과 교수법이 수학성적에 유의한 영향을 준다” 이다. 이를 알아보기 위하여 집단 간 평균을 비교하고 t검정을 통해 통계적 유의성을 살펴보고자 한다. 독립변수(x)는 교수학적 조치(상세화 수업 여부)이며, 수준별 집단 구분 기준은 사전검사 성적이다. 종속변수는 사후검사1 성적(y_1)과 사후검사2 성적(y_2)이다.

둘째, 사전검사에 비해 사후검사1의 평균 변화를 수준별로 살펴보고자 한다. 이를 위해 t검정을 통해 집단 간 차이가 통계적으로 유의한지 확인한다.

셋째, 사후검사1에 대해 평균의 동일성과 등분산성은 t검정을 통해 살펴보고자 한다. 이는 사후검사1의 결과가 유의하지 않은 경우, 사후검사1과 사후검사2의 관계를 알아보기 위함이다.

넷째, 사후검사1에 비해 사후검사2의 평균 변화를 수준별로 살펴보고자 한다. 이를 위해 사후검사1을 독립변수로, 사후검사2를 종속변수로 하여 선형회귀분석을 실시한다. 조정된 데이터에 대해 집단 간 차이가 통계적으로 유의한지 t검정을 통해 확인한다.

회귀분석(regression analysis)은 여러 독립변인을 이용하여 하나의 종속변인을 얼마나 잘 설명

하는지를 분석하기 위한 통계적 기법이다. 회귀분석은 독립변인과 종속변인 간의 인과관계로 해석되지 않도록 주의해야 하며, 어느 쪽을 독립변인으로 보는가에 따라 다른 의미를 가지므로 방향성을 갖게 된다. 회귀분석의 기본 가정은 회귀선 기울기의 동질성 가정이다. 사전검사 점수에서 각 집단의 평균이 모두 동일한 값을 갖도록 데이터를 조정한 후 이 조건 하에서 새롭게 도출된 사후검사 점수의 평균, 즉 조정평균이 집단 간에 동일한지를 검정한다. *Figure* 4와 같이 조정평균은 사전검사 평균이 전체 집단의 사전검사 평균으로 이동하면 사후검사 평균이 얼마일지를 추정하여 산정한다(SNAEA, 2013).

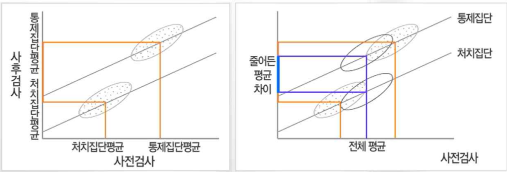

***Figure* 4.** Method for equality of adjusted mean

회귀분석 절차에 따라 각 집단 내에서 사후검사1을 독립변인으로 하고 사후검사2 점수를 종속변인으로 하여 회귀분석을 실시하고 회귀선을 구한다. 이때 각 집단 내에서 구한 회귀선 기울기의 동일성을 확인하기 위해 이원변량분석을 통해 살펴보고자 한다. 기울기의 동일성을 만족하는 경우, 회귀계수를 사용하여 사후1 점수와 사후2 점수를 조정한 결과를 사용할 수 있으며 이에 따라 사후1 조정점수와 사후2 조정점수의 관계를 살펴볼 수 있다.

마지막 통계 분석 절차는 조정된 사후검사1에 비해 조정된 사후검사2의 평균 변화를 수준별로 확인하기 위해 t검정을 실시한다.

본 연구는 유의수준 $p=0.05$로 독립표본 t검정과 선형회귀분석을 실시하였으며, 통계 처리는 SPSS(Statistical Package for the Social Science) 12.0K for Windows 도구를 활용하였다.

분석을 위해 Levene이 제안한 동변량성검사(test for equality of variance)를 실시하여, 두 집단의 등분산성을 가정할 수 있다. 등분산이 가정되지 않는 경우도 평균의 동일성에 대한 유의확률이 산출되므로 유의수준에 따라 가설을 기각하거나 채택하게 된다.

약 1개월간 실험을 하여 사후검사1의 결과를 수집하였으며, 수업의 지속적인 파지 효과를 확인하기 위해 약 3개월 동안 상세화한 교수학적 조치를 지속적으로 실행하여 사후검사2의 결과를 수집하였다. 실험설계는 *Table* 5와 같다.

***Table* 5.** Experimental design

NR	O_1	X_1	O_2	X_2	O_3
NR	O_1	X_3	O_2	X_4	O_3

O_1: 사전검사
O_2: 사후검사1, O_3: 사후검사2
X_1: 비교반 수업1, X_2: 비교반 수업2
X_3: 실험반 수업1, X_4: 실험반 수업2

실험반에서는 상세화한 교수학적 조치에 따른 학생들의 반응 특징을 질적으로 분석하였다.

자료 수집을 위해 수업 중에 비디오 녹화와 음성녹음을 하고 학생들의 답안지를 회수하였다. 분석을 위해 수학교육전문가로부터 자문 및 검토를 의뢰하였으며, 교수실험은 수학교사 3명이 담당하였다. 통계분석 결과를 해석하고 학생들의 답안지를 질적인 방법으로 분석하였다. 전문가와의 논의를 통해 통계분석 결과를 확인하고 연구 참여 학생들이 성취기준에 도달하였는지를 질적으로 분석하였다. 또한 분석의 결과에 대해 다른 의견이 있으면, 서로 협의를 거쳐 확정하였다.

Ⅳ. 연구 결과

이 장에서는 학업성취도에 따른 교수학적 조치의 효과를 분석한다.

1. 통계 분석 결과

가. 통계 결과의 개요

t검정을 위해서는 등분산, 평균의 동일성, 독립성, 정규성 등의 통계적 가정을 확인해야 한다. 회귀분석에서는 위 조건을 충족해야 하며, 추가로 기울기 동일성을 확인해야 한다. 실험집단과 비교집단의 집단별 사례수가 30이상이므로, 정규성을 충족한다. 실험반과 비교반은 기존 학급의 구성을 그대로 유지하여 각각 독립적으로 추출된 표본이므로, 독립성도 충족한다.

1) 사전검사

사전검사에 대해 등분산성과 평균의 동일성은 독립표본 t검정을 통해 살펴보았다. 등분산 가정은 Levene의 등분산 검정을 이용하였다. *Table* 6에 의하면 실험반과 비교반에 대해 $p=.132$, $p>.05$ 이므로 등분산성을 충족한다. 또한 $t(p)$의 값인 0.054가 0.05보다 크므로 “두 집단 간 평균이 같다”는 귀무가설을 충족하여 평균의 동일성 가정을 만족한다.

***Table* 6.** Result of Pre-test $(p=0.05)$

집단	N	평균	표준편차	$F(p)$	$t(p)$
비교반	95	63.4	28.00	2.288	1.946
실험반	56	53.8	31.48	(.132)	(.054)

2) 사후검사1

사후검사1에 대해 등분산성과 평균의 동일성은 독립표본 t검정을 통해 살펴보았다. 등분산 가정은 실험반과 비교반의 유의확률을 *Table* 7에서 확인한 결과, $p=.647$, $p>.05$이므로 집단 간 분산은 같게 나타났다. 마찬가지로 평균의 동일성 가정은 0.304로 유의수준 0.05보다 크므로 집단 간 평균도 같다고 분석되었다.

***Table* 7.** Result of Post test 1 $(p=0.05)$

집단	N	평균	표준편차	$F(p)$	$t(p)$
비교반	95	30.2	11.94	.210	1.032
실험반	56	28.1	12.98	(.647)	(.304)

3) 사후검사2

사후검사2에 대해 이원변량분석을 실시하였으며, 이를 통해 실험반과 비교반의 교수학적 조치와 사후검사 간 상호작용 여부를 검정하였다. *Table* 8에 의하면 p의 값(0.399)이 0.05보다 크므로 회귀선 기울기의 동일성 가정을 충족한다.

***Table* 8.** Result of variance analysis $(p=0.05)$

변량원	제곱합	df	평균제곱	F값	p
수업(주효과)	318.529	1	318.529	1.208	.274
사후검사(주효과)	93450.526	1	93450.526	354.365	.000
상호작용효과	188.442	1	188.442	.715	.399
오차	38765.796	147	263.713		
수정합계		150			

나. 사후검사1의 효과 분석

사전검사 결과는 *Table* 6이며, 교수학적 조치에 따른 사후검사1의 결과는 *Table* 7과 같다. 두

결과를 비교해 보면, 사전검사에서 실험반 평균이 9.6점 낮았으나, 사후검사1에서는 2.1점 낮게 나타났다. 이를 통해 평균의 차이가 줄어들었음을 확인할 수 있다. 그러나 사후검사1의 통계적 유의확률은 0.304이므로, 실험반과 비교반의 집단 간 평균 차이는 전체적으로 유의하지 않은 것으로 분석되었다.

Table 10에서 수준별 집단 간 유의확률을 보면 C집단은 0.308, B집단은 0.442, A집단은 0.784로 나타났으며 통계적으로 유의하지 않다.

그러나 사전검사 및 사후검사1의 하위 집단 평균을 비교해 보면, 사전검사에서는 실험반 평균(12.4점)이 비교반(19.5점)에 비해 월등히 낮았으나, 사후검사1에서는 그 차이가 좁혀졌다. 또한 사전검사에서는 중위 및 상위 집단의 평균이 비교반에 비해 실험반이 낮았으나, 사후검사1에서는 실험반이 비교반에 비해 높아졌음을 확인할 수 있다. 이는 약 1개월간 대수 알고리즘을 상세화한 교수학적 조치가 중위 및 상위 집단에 긍정적인 영향을 주었음을 의미한다.

***Table* 10.** Result of Post test 1 for level ($p=0.05$)

집단	N	평균	표준편차	$F(p)$	$t(p)$
비교 C	21	17.9	10.13	.023	1.035
실험 C	17	14.4	10.76	(.880)	(.308)
비교 B	18	25.4	10.17	.021	-.779
실험 B	13	28.3	11.01	(.886)	(.442)
비교 A	56	36.4	8.35	1.544	-.275
실험 A	26	36.9	5.49	(.218)	(.784)

다. 사후검사2의 효과 분석

교수학적 조치에 따른 사후검사2의 결과는 *Table* 11과 같다. 교수학적 조치를 보다 지속적으로 투입했을 때 평균을 수치적으로 비교해본 결과, 실험반이 비교반보다 모든 수준에서 높아졌음을 확인할 수 있다. 즉, 실험반의 상위 집단은 평균이 2.6점, 중위 집단은 평균이 2점, 하위 집단은 평균이 6.3점 더 높아진 것으로 드러났다. 그러나 통계적으로는 집단 간 평균의 차이가 유의하지 않았다.

***Table* 11.** Result of Post test 2

($p=0.05$)

집단	N	평균	표준편차	$F(p)$	$t(p)$
비교 C	21	27.4	17.56	.254	-1.039
실험 C	17	33.7	19.80	(.617)	(.306)
비교 B	18	48.9	20.45	1.272	-.225
실험 B	13	50.9	28.29	(.269)	(.823)
비교 A	56	81.2	21.14	1.432	-.557
실험 A	26	83.8	16.91	(.235)	(.579)

사후검사2의 변화를 보다 정밀하게 분석하기 위해 회귀분석을 실시하였으며, 독립변수를 사후검사1(x)로, 종속변수를 사후검사2(y)로 한 회귀분석 결과는 *Table* 12와 같다.

***Table* 12.** Result of regression analysis

($p=0.05$)

변인	B계수	표준오차	β계수	$t(p)$
상수	1.286	3.423		19.342
사후1	2.075	.107	.846	(.000)

회귀식은 다음과 같다.

$(\text{사후검사2}) = 1.286 + 2.075 \times (\text{사후검사1})$

Figure 4에서 설명하였던 개념 및 회귀식을 활용하여 조정점수를 산출하였다. 사후검사2의 조정점수에 대한 t검정 결과는 *Table* 13과 같다.

실험반과 비교반의 평균 차이에 대한 유의확

률은 C집단에서 0.031로 나타나 통계적으로 유의한 것으로 드러났다. 따라서 상세화한 대수 알고리즘의 교수학적 조치를 약 3개월간 지속적으로 투입했을 때, 학업성취도 하위 수준에는 유의하게 효과가 있는 것으로 해석된다.

***Table* 13.** Result of adjusted points for Post test 2

($p=0.05$)

집단	N	평균	표준편차	$F(p)$	$t(p)$
비교 C	21	24.1	17.56	.254	-2.241
실험 C	17	37.7	19.79	(.617)	***(.031)***
비교 B	18	51.5	20.46	1.272	.484
실험 B	13	47.3	28.29	(.269)	(.632)
비교 A	56	81.5	21.14	1.432	-.339
실험 A	26	83.1	16.91	(.235)	(.736)

Table 11과 *Table* 13에 의하면, 중위 및 상위 수준에서 대수 알고리즘의 상세화에 따른 교수학적 조치는 통계적으로 유의하지 않은 것으로 나타났다. 그러나 평균을 수치적으로 비교해본 결과, 실험반의 하위 및 상위 집단이 비교반보다 더 높아졌음을 볼 수 있다. *Table* 13에서 실험반의 중위 집단은 비교반보다 더 낮게 나타났지만 조정 이전에 *Table* 11에서 실험반이 더 높았음을 확인하였다. 이는 교수학적 조치가 중위 집단과 상위 집단에도 부정적인 영향을 미친 것은 아님을 의미한다.

2. 정성적 분석 결과

정성적 분석은 실제 C집단의 학생들이 성취 수준에 어떻게 도달했는지 구체적인 사례를 확인하기 위한 것이었다. 이를 위해 지수법칙, 다항식의 연산, 연립방정식의 대수 계산에 대하여 오류 사례를 보인 C집단의 5명(C1~C5)의 반응을 *Table* 1의 코딩에 따라 살펴보고자 한다.

가. 사후검사1의 효과 분석

학생들은 대수적 절차의 상세화에 따른 교수학적 조치를 1개월 정도 받고 나름대로의 반복연습을 하였다. 다음은 반응의 예이다.

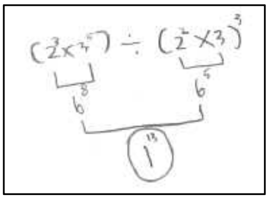

***Figure* 5.** Response of C1 (PERS code)

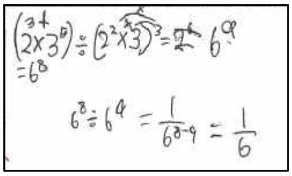

***Figure* 6.** Response of C2 (PERF code)

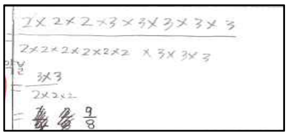

***Figure* 7.** Response of C3 (S code)

지수법칙에서 C집단 학생들은 밑을 계산하지 않고 지수 처리만 하는 것을 어려워하였다. C집단의 학생들은 자신만의 대수 문법을 만들어내는 결과를 보여주었다. *Figure* 5는 C1이 자신만의 지수법칙 문법을 개별적으로 만들어낸 PERS 코드의 예이다. C1은 밑을 연산에 따라 곱하기 또는 나누기를 하고 지수를 더한다는 문법을 찾

았음을 보여준다. *Figure* 6에서 C2는 지수법칙을 공식으로 적용하면서 지수끼리 더하고 곱하고 빼는 공식을 PERF 코드에 따라 모방하고는 있으나, 밑의 조건을 놓치는 등 공식만 잘못 따르는 오류를 여전히 범하고 있음을 보여준다. 따라서 *Figure* 7과 같이 S코드에 따라 밑을 풀어서 쓰도록 상세화한 교수학적 조치를 인식하게 하였다. 그 결과, 일부 학생들은 교사의 안내에 주목하여 S코드에 도달했음을 보여준다.

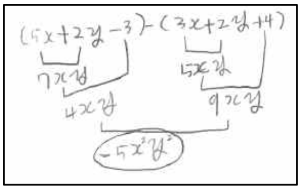

***Figure* 8.** Response of C1 (PERS code)

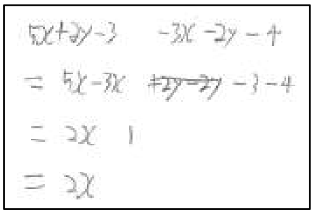

***Figure* 9.** Response of C3 (PERF code)

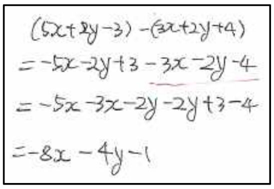

***Figure* 10.** Response of C4 (S code)

다항식의 계산에서 C집단 학생들은 동류항의 계산과 나누기의 분배법칙을 어려워하였다. *Figure* 8은 C1이 자신만의 동류항 계산 문법을 만들어낸 PERS 코드의 예이다. C1은 계수를 연산에 따라 계산하고 문자를 곱하고 있음을 보여준다. *Figure* 9는 C3이 동류항 계산을 PERF 코드에 따라 모방하였지만 $-3-4$의 상수항 계산에서 부호와 함께 처리하지 못한 결과를 보여준다. *Figure* 10도 C4가 괄호 밖의 부호에 대한 분배법칙을 S 코드에 따라 강조한 나머지, 따를 필요가 없는 규칙에도 적용하여 실수한 예를 보여준다. 따라서 동류항을 부호와 함께 묶어 처리하고 나눗셈을 분모에 쓰도록 상세화한 교수학적 조치를 인식하게 하였다.

나. 사후검사2의 효과 분석

대수적 절차의 상세화에 따른 교수학적 조치는 2개월 정도 더 연장되었다. 학생들은 방정식과 부등식, 일차함수를 다루었지만 관련 대수 계산에 일관성 있게 접하면서 지속적으로 나름대로의 반복연습을 하였다. 다음은 반응의 예이다.

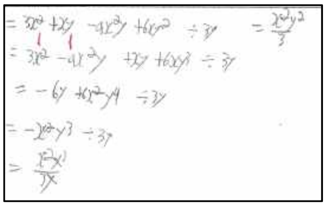

***Figure* 11.** Response of C3 (D code)

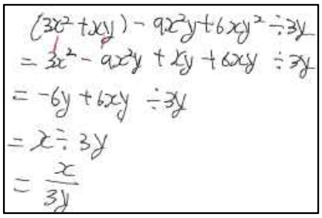

***Figure* 12.** Response of C4 (D code)

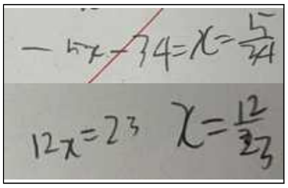

***Figure* 13.** Response of C5 (D code)

다항식의 계산에서 C집단 학생들은 나눗셈을 곱셈의 역연산으로 처리하는 것을 어려워하였다. *Figure* 11과 *Figure* 12는 $x(3x+y)$와 같이 (단항식)× (다항식)의 분배법칙을 D 코드에 따라 올바르게 따라했으나, (다항식)÷ (단항식)과 같이 나누기의 분배법칙에서는 실패한 예를 보여준다. C3과 C4는 모두 $-(9x^2y-6xy^2)\div 3y$에서 나누기의 분배법칙보다, 괄호 밖의 $(-)$부호를 먼저 분배하는 오류를 범하고 있다. 이는 $\frac{-9x^2y}{3y}+\frac{6xy^2}{3y}$와 같이 부호 처리와 나눗셈을 분모로 차례대로 처리하도록 교수학적 조치를 하였다. 그러므로 C집단 학생들에게는 복합적으로 '동시에' 처리하기보다, 이를 순차적으로 더 상세화하여 '조작 순서'를 따르게 하는 교수학적 조치의 효과를 확인할 수 있었다. *Figure* 13과 같이 연립방정식에서도 C집단 학생들은 등식의 성질에서 나누기 절차를 어려워하였다. 따라서 계수를 분모로 처리하도록 상세화한 교수학적 조치를 D 코드에 따라 토론하고 공유하였다.

주목할 점은 반복연습에 어느 정도의 시간 확보가 필요한 것을 확인하였다는 것이다. 사후검사2의 답안에서 보다 많은 C집단 학생들이 교수학적 조치에 더 잘 따르는 발전된 결과를 보여주었다. C집단에서 착실하게 교수학적 조치를 따르는 사례가 점차 증가한 것으로 볼 때, 천천히 배우는 학생들에게 본 실험은 긍정적인 효과를 보인 것으로 해석할 수 있다.

Ⅴ. 논의 및 결론

수학교실 상황은 다양한 수준의 학생들이 혼재되어 있다. 천천히 배우는 중학생들도 교실에서 소외되지 않아야 하며, 그 외 학생들에게도 의미 있는 대수 학습이 이루어질 필요가 있다.

본 연구는 대수 알고리즘의 상세화에 따른 학습 효과를 확인하고 현장 적합성을 분석하였다. 이를 위해 읍면지역의 중학교 2학년 151명을 대상으로 하여 교육과정 내에서 한 학기동안 수업 설계 및 실행을 지속하였다. 또한 정량적 분석과 정성적 분석을 병행한 결과를 제시하였다. 이상의 연구를 종합한 결과는 다음과 같다.

첫째, 1개월보다 3개월 정도로 수학 수업 시간을 충분히 확보했을 때, 대수 알고리즘의 상세화한 교수학적 조치는 천천히 배우는 중학생들의 대수 학습을 향상시키는 효과가 있음을 확인하였다. 이러한 교수학적 조치는 산술 방식에 머물러 비형식적이더라도 학생들에게 의미 있는 예비 대수 관념을 이용함으로써 조작 가능하게 한 것이다. 이는 Linchevski & Herscovics(1996)의 관점과도 일치한다.

Woo(2017, p. 384)는 전통적으로 대수 학습은 연습을 통해 문자와 식에 대한 대수 언어의 형식적인 여러 규칙을 숙달하고 이를 적용하는 것을 강조했으며, 학생들에게 많은 어려움을 주었다고 하였다. Sfard(1995)도 역사적으로 조작적이자 구조적인 이중성에서 대수 학습의 전형적인 어려움의 원인을 찾았다. 이에 따라 세부 절차에 대한 교수학적 조치를 취하면서도 실질적인 효과를 기대하지는 못하였다. 그러나 예측과 달리 약 3개월 지속된 투입 결과, 하위 집단에서 통계적인 차이를 확인한 것은 의미가 있다.

둘째, 대수 알고리즘의 상세화를 통해 이질집단인 수학교실에서 동일한 내용을 다양한 접근

방식으로 비계설정하여 학생들이 선택할 수 있는 기회를 제공했다는 유용성을 확인하였다. 성취도가 중위권 이상의 학생들은 상세화한 모든 대수 절차를 따르지 않도록 지도하였다. Watson & De Geest(2012)는 세부과제의 배열을 통해 수학적 일관성을 지속적으로 유지할 것을 강조하였으며, 본고의 교수학적 조치도 이에 따른 것이었다. 그동안 수준별 수업에서 같은 학습목표 아래 난이도가 다른 문제를 보충, 기본, 심화과정으로 따로따로 제공했던 것과는 대조적이다. 이는 교사들이 현장에서 항상 마주하는 골칫거리로, 학생들의 수학적 수준에 있어서 상당한 차이를 관리해야 하는 방식에 대한 아이디어를 제공했다고 판단된다.

셋째, 본 연구의 교수학적 조치가 천천히 배우는 학생 지도에 초점을 맞춘 것이지만, 중위 및 상위 집단에도 긍정적인 효과가 있음을 확인하였다. 정성적 분석을 통해 모둠 활동을 하면서 A, B 집단의 학생들은 가르쳐주는 입장에서 자신의 오류를 수정하는 사례를 확인하였다. 이는 Sfard(1995)의 관점에 따르면, 기계적 조작을 계속하다보면 결국 물화에 도달하게 된다는 것과 일치한다.

이상의 결과는 향후 유사한 학교 현장의 실행연구를 위해 다음과 같은 교수학적 시사점을 제공한다.

첫째, 천천히 배우는 중학생들에게 원리를 이해하고 의미를 구성하도록 실천하는 것은, 수학을 잘하는 학생들의 오류를 없애는 것보다 실질적인 효과를 기대할 수 있다. 수학 결함이 많은 경우 제거해야 할 오류가 많기 때문에, 교수학적 조치를 위해 조금만 상세화한 비계설정을 하더라도 개선되는 효과가 나타나기 때문이다. 다만 일관성 있는 교수학적 조치로 실질적인 효과를 거두기 위해서는 어느 정도의 시간 확보가 반드시 필요할 것이다.

둘째, 교수 절차를 상세화할 때 유의할 점은 비계설정을 위해 어느 정도로 세세하게 세부과제를 배열해야 하는지 결정하는 것이다. 지나치게 수학적이면 천천히 배우는 학생들에게 수용되지 못하는 반면에, 지나치게 비형식적이면 이후에 수학 개념 발달을 방해할 수도 있다는 것이다. 교수학적 조치에 있어서 수학과 비형식적인 의미 사이의 조화와 균형을 이루는 것이 중요하다. 본 연구와 같이 학생들을 수준별로 구분하여 분석한다면, 연구 참여자의 특성에 따라 수학과 비형식 사이의 어느 쪽에 비중을 두어야 할지 결정할 수 있을 것이다.

셋째, 일관성 있는 수학적 참여를 위해 *Table* 1의 G코드와 A코드에 대한 교수학적 조치의 보완이 필요하다. 본 실험에서는 지필평가를 통해 수학적 연결성(G)이나 대상화(A)까지 확인하지 못하였기 때문이다. 이를 보완하여 A, B 집단에도 통계적인 유의성을 확인하기 위한 후속연구가 필요하다.

본 연구의 실천사례를 바탕으로 '모두를 위한 대수'를 일반화하는 실행이 가능해졌다는 의의가 있다. 대수 외의 내용영역에서도 천천히 배우는 중학생을 돕는 교수학적 조치를 확인하는 후속연구가 요구된다. 본 연구에서 제시한 결과와 시사점이 향후 수학 부진학생을 위한 학교 현장 연구에 도움이 되길 기대한다.

참고문헌

Chang, H. W. (2007). Analysis on the principle for teaching algebra revealed in Clairaut's <Elements of Algebra>. *Journal of Educational Research in Mathematics, 17*(3), 253-270.

장혜원(2007). Clairaut의 <대수학 원론>에 나타난 대수 지도 원리에 대한 분석. **수학교육학연구, 17**(3), 253-270.

Kim, N. H. (1997). *Didactical analysis of variable concept and search for the direction of its learning-teaching.* (Unpublished PhD thesis). Seoul National University, Korea.

김남희(1997). **변수 개념의 교수학적 분석 및 학습-지도 방향 탐색.** 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

Kim, S. J. (2004). *Analysis of the algebraic thinking factors and search for the direction of its learning and teaching*. (Unpublished PhD thesis). Seoul National University, Korea.

김성준(2004). **대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색.** 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

Ko, S. S. & Lee, S. H. (2006). A case study on the mathematical problem solving performance of simultaneous equations for the students from a remedial course. *Journal of the Korean School Mathematics Society, 9*(1), 105-120.

고상숙, 이상희(2006). 특별보충과정 학생들의 문제해결수행에 대한 사례연구. **한국학교수학회 논문집, 9**(1), 105-120.

Jang et al. (2018). Middel school math 1. Seoul: Jihaksa.

장경윤 외(2018). **중학교수학1.** 서울:지학사.

Jang et al. (2019). *Middel school math 2. Seoul: Jihaksa.*

장경윤 외(2019). **중학교수학2.** 서울:지학사.

Jang et al. (2019). *Middel school math 2 -Teachers' guide*. Seoul: Jihaksa.

장경윤 외(2019). **중학교수학2 교사용 지도서.** 서울:지학사.

Lee, D. H. et al. (2017). *Designing and implementing tasks for inquiry in school mathematics*. Korea foundation for the advancement of Science & Creativity.

이동환, 이경화, 고은성, 권석일, 김동원, 김연, 박진형, 구나영, 이현정(2017). **좋은 수학과제 분석 발굴 연구.** BD18020001. 한국과학창의재단.

Lim, M. I. & Chang, H. W. (2018). A Case Study on the Changes in the Levels of Arithmetical Thinking and Transition to Algebraic Thinking of a 7th Grader who was an Underachiever in Number and Operation. *Journal of Educational Research in Mathematics, 28*(3), 345-365.

임미인, 장혜원(2018). 수와 연산 영역에서 부진을 경험한 중학생의 산술적 사고 수준 변화 및 대수적 사고로의 이행에 관한 사례연구. **수학교육학연구, 28**(3), 345-365.

Linchevski, L. & Hercovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equations. *Educational Studies in Mathematics, 30*, 39-65.

Ministry of Education (2015). *Mathematics curriculum.* Notification of the Ministry of Education No. 2015-74. [Vol. 8]. Seoul: Author.

교육부(2015). **수학과 교육과정.** 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8]. 서울: 저자.

Patahuddin, S. M., Puteri, I., Lowrie, T., Logan, T. & Rika, B. (2018). Capturing student mathematical engagement through differently enacted classroom practices: applying a modification of Watson's analytical tool. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49*(3), 384-400.

Seoul National Academy for Educatonal Administrators. (2013). *Educational research and statistical analysis for teachers*. Seoul: SNU Department of Education.
서울대학교 사범대학 교육행정연수원 (2013). **교사를 위한 교육연구 및 통계분석.** 서울: 교육원격 직무연수팀.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior, 14*, 15-39.

Watson, A. & De Geest, E. (2012). Learning coherent mathematics through sequences of microtasks: Making a difference for secondary learners. *International Journal of Science and Mathematics Education, 10*, 213-235.

Watson, A. & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity*. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
이경화 역(2015). **색다른 학교수학.** 서울: 경문사.

Woo, J. H. (2017). *School math educational foundation (revised) A*. Seoul: Seoul National University Publishing Council.
우정호 (2017). **학교수학의 교육적 기초 (개정판) 상.** 서울: 서울대학교출판문화원.

Yoo, J. H. & Yoo, J. E. (2012). The effect of teacher-centered / student-centered discussion on students' academic achievement differing in learning tasks -Focusing on High School Home Economics. *The Journal of Yeolin Education, 20*(4), 115~135.
유진희, 유진은(2012). 교사중심・학생중심 토의수업이 개념・원리 학습과제 관련 성취도에 미치는 영향 -고등학교 가정과를 중심으로. **열린교육연구, 20**(4), 115-135.