대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 31 권 제 1 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 31, No. 1, 1 ~ 15. Feb 2021
DOI: https://doi.org/10.29275/jerm.2021.02.31.1.1

미적분학의 기본정리와 관련된 ‘Newton의 직관’에 대한 재고찰[1)]

박 선 용*
*영남대학교 교수

Reconsidering Newton’s Intuition Related to the Fundamental Theorem of Calculus

Park, SunYong*
**Professor*, *Yeungnam University*, *South Korea*, polya@yu.ac.kr

초록. 이 연구의 목적은 미적분학의 기본정리의 역사발생 분석에 대한 Kang(2019)의 주장 중 일부를 반박하고 보완하는 데에 있다. 그는 Newton이 엄격한 ‘차원의 구분’에 기초해 넓이증분 직관을 활용하면서 미적분학의 기본정리를 통찰했을 것이라 추측하였다. 이에 대해, 이 연구에서는 Newton이 ‘동차성의 원리를 극복’하는 해석기하학의 특성에 따라 넓이증분보다는 넓이의 평균 및 순간변화율에 집중하여 자신의 방법을 다루었다는 것을 드러내려고 하였다. 그런데 이 연구의 결과는, Kang이 제기한 넓이증분 직관을 평균높이의 존재를 암묵적으로 인정하는 직관으로 해석하게 되면 그의 주장이 정합성을 갖추게 됨을 보인다고 하겠다.

핵심어: 미적분학의 기본정리, 순간변화율, 직관, 평균높이, 평균변화율

ABSTRACT. The purpose of this study is to refute an argument in Kang (2019) and offer alternative views concerning the analysis of the historical genesis of the fundamental theorem of calculus. Kang (2019) indicated that Newton might have gained insight into the fundamental theorem of calculus using the area increments intuition based on strict distinctions of dimensions. In response, this study seeks to show that Newton addressed his method by focusing on the mean and instantaneous rate of area change rather than the area increments as in the analytic geometry characteristic that breaks the principle of homogeneity. The results of this study also show that the area increments intuition remains pertinent to implicitly recognizing the existence of average height.

KEY WORDS: fundamental theorem of calculus, instantaneous ratio of change, intuition, average height, mean ratio of change

1) 이 연구는 2020년도 영남대학교 학술연구조성비에 의한 것임.
Received: Oct 22, 2020 / Reviewed: Feb 05, 2021 / Accepted: Feb 05, 2021

Ⅰ. 서론

Kang(2019)은 역사 발생적 분석을 통해 미적분학의 기본정리에 대한 직관을 도출하고 그러한 직관 형성을 가능케 하는 발견적 교수법을 제안하고자 하였다. 이와 관련해, 그는 "Newton은 어떻게 (어떤 곡선 아래의) 넓이의 (순간)변화율이 곧 y좌표라는 것을 당연하게 생각할 수 있었을까? Newton은 넓이의 증분에 주목하였기 때문에 미적분학의 기본정리를 통찰할 수 있었던 것으로 보인다(Ibid, p. 532)."고 주장하며, '넓이증분' 직관이 미적분학의 기본정리에 이르는 데에 크게 기여한 직관이라 보았다.

물론, 어떤 곡선 아래의 넓이와 그 넓이의 순간변화율을 다룰 때 '넓이 증분'을 다루는 과정은 필수적으로 요구된다. 그런데 그는 이러한 일반적인 평가의 수준을 넘어서, 미적분의 역사발생 이면에는 넓이 변화율과는 독립적인 넓이증분이 존재하고 그에 대한 직관이 미적분학의 기본정리에 이르게 하는 데에 결정적 역할을 했을 것이라 주장한다.

이러한 증분의 독자적인 역할에 대해, 그는 "변화량이 변화율의 일부분이 아니라 변화량 그 자체를 하나의 대상으로 파악했기 때문에, Newton은 넓이의 증분에 주목할 수 있었던 것으로 생각된다(Ibid, p. 533).[2]"라고 말하며, 그 근거와 함께 부연하기도 하였다.

Newton이 변화율과 변화량을 구별했다는 것은 분명한 사실이다. 하지만 그가 미분과 적분의 관계를 발견 또는 발명함에 있어 '넓이의 증분'에 더욱 주목했고 이것이 매우 중요한 역할을 했다고 할 수 있을까? 또한, 뉴톤이 변화량이 변화율의 일부분이 아니라 변화량 그 자체를 하나의 대상으로 파악하였고 그러한 분리를 중요시했다고 할 수 있을까? 이 연구는 이러한 의문으로부터 출발하였다.

그런데 Newton은 1687년에 출판된 <프린키피아(Philosophiae naturalis principia mathematica)>에서 '시간증분'과 '넓이증분' 각각을 독자적으로 고려할 때 궁극적인 양처럼 간주되는 무한소나 불가분량 개념을 야기할 위험이 있기 때문에 그 각각이 아니라 시간증분 대 넓이증분의 비의 궁극적인 값에 집중해야 한다고 강조했다. 즉, 그는 변화율이 아닌 넓이증분 자체에 대해 주목하는 것을 오히려 매우 경계하고자 했던 것으로 보인다(Cohen, 1999; Newton, 1687).

구체적으로, Newton은 프린키피아에서 "만약 사라져 버리는 양들의 궁극적인 비율을 얻을 수 있다면, 그들의 궁극적인 양도 구할 수 있는 게 아니냐고 반론을 제기할 지도 모른다. (중략) 그러나 이 반론은 틀린 가설에 바탕을 두고 있다. 양들이 사라질 때의 궁극적인 비율이란, 정말로 궁극적인 양들의 비율이 아니라, 한없이 줄어드는 양들 사이의 비율이 점점 가까이 가는 극한을 말한다(Newton, 1687, p. 55)."라고 하였다.

연구자의 이러한 반론에 대해, 프린키피아에 소개된 내용은 Newton의 후기연구[3]에 해당하며

2) 이 경우에, 변화량은 넓이이므로 엄밀히 말해 넓이의 증분은 '변화량의 차이'지만 그 차이도 넓은 의미로 변화량으로 간주할 수 있다.

3) Boyer(1949)에 따르면, Newton의 미적분학 연구는 3단계의 시기로 구분된다. 초기단계는 대략 1665년부터라 하겠는데 그가 어떤 곡선 아래의 넓이를 무한소 면적의 합을 통하지 않고 순간변화율을 구하는 과정을 역으로 활용해 그 넓이를 구하기 시작하던 시기이다. 중기단계는 그가 <유율법과 무한급수(Methodus fluxionum et serierum infinitarum)>를 저술했던 1671년 무렵(출판은 1736년)부터라 하겠는데 이 시기에는 유량 사이의 관계와 유율 사이의 관계를 연결시키면서 새로운 표기법을 도입하는 시도를 했다고 할 수 있다. 후기단계는 곡선의 구적법<(De quadratura curvarum)>을 저술했던 1676년 이후(출판은 1704년)부터라

그의 초기연구에서는 넓이증분에 주목했기에 곡선 아래 넓이의 순간변화율이 그 곡선의 세로좌표가 됨을 통찰할 수 있었을 것이라는 재반론이 가능할 수도 있다.

실제로, Kang(2019)의 연구에서 인용했던 것은 주로 Newton의 초기연구 사례이다. 따라서 비판적 검토를 시작함에 있어, 마치 귀무가설을 세우는 것처럼, 그 연구에 대해 공정하게 평가하려는 시도가 분석의 출발점이 되어야 할 것으로 보인다.

한편, Kang은 Newton이 넓이증분을 중요시했다는 주장을 그의 중기연구와 관련시키기도 하였다. 구체적으로, Newton의 유율법에서도 '넓이증분'에 주목할 때 어떤 곡선 아래의 넓이의 순간변화율이 그 곡선의 세로좌표 y가 된다는 것이 자명해진다고 주장한 것이다[4].

이러한 일련의 논의는 Newton의 미적분 발명과정의 초기 및 중기 단계에 있어 '넓이증분'과 '넓이변화율'의 각 역할 및 그 사이의 관계에 대한 명확한 해명을 요구한다.

이에, 이 연구에서는 Kang의 연구에서 '넓이증분'직관이 미적분 발생에 있어 결정적 역할이 했다는 것에 대한 근거로 제시되었던 사항에 대해 고찰하면서 Newton이 미적분 발명과정에 있어 '넓이증분'과 '넓이변화율'을 어떻게 이용했는지를 분석하고자 하였다.

그리고 이 분석결과에 기초해, Newton이 어떤 직관을 통해 미적분학의 기본정리에 대해 통찰할 수 있었는지에 대해 고찰하고, 그 직관을 반영한 미적분 교육에 대해 논의하고자 하였다.

II. '넓이증분'에 주목했다는 근거에 대한 논의

Newton은 이항정리를 바탕으로 1665~1666년 사이에 유율 계산법을 갖게 되었고 그것을 1669년에 <무한급수의 방정식에 의한 해석에 대하여(De analysi per aequations numero terminorum infinitas)>를 통해 처음으로 발표[5]하였다. 이와 관련해서, Kang(2019)은 $S(x)=(\frac{n}{m+n})ax^{\frac{m+n}{n}}$이 곡선 $f(x)=a^{\frac{m}{n}}$의 넓이가 됨을 보이는 사례를 통해 그 책의 Newton의 방법[6]을 다음과 같이 소개하였다.

> 면적 $BD\delta\beta$=면적 $BKH\beta=ov$를 만족하도록 면적 $ABD=z$, 길이 $BD=y$, 길이 $AB=x$, $B\beta=o$, $BK=v$라 두면 곡선 $z=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$에 대하여 x는 $x+o$으로, $z=z+ov$로 치환하여 다음 식을 얻는다.
>
> $(z+ov)^2=\frac{4}{9}(x+o)^3$
>
> $z^2+2zo+o^2v^2=\frac{4}{9}(x^3+3x^2o+3xo^2+o^3)$
>
> o이 없는 항 z^2과 $\frac{4}{9}x^3$은 같으므로 제거하고 양변에 o를 나누면

하겠는데 무한소를 제거하고자 하는 시도를 하면서 극한과 유사한 '궁극적인 비율' 개념을 도입하던 시기이다.

4) Newton에게 있어 순간변화율이란 어떤 한 유량에 대한 '유율의 궁극적 값'이 아니라 '유율들 사이의 비율의 궁극적 값', 일명 '궁극적 비율'이다. 오늘날 관점에서 보면, 어떤 유한한 시간증분이 있을 때 두 유율 사이의 비율은 평균변화율에 해당하며, 시간증분이 한없이 작아질 때 그 비율은 순간변화율에 해당한다.

5) 1665~6년 사이의 생각을 기초로 1669년에 작성되었으나, 출판은 1711년에 이루어졌다(Boyer, 1949, p. 219).

6) 1665년 이후, Newton 자신이 무한급수와 변화율을 연계시키는 방법을 '나의 방법'이라 말했다는 점에서 'Newton의 방법'이라 부르는 것이 적절할 것이다(Boyer & Merzbach, 1961, p. 638).

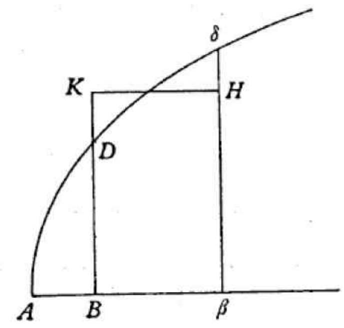

***Figure* 1.** Reconstruction of Newton’s Approach

$2zv+ov^2=\frac{4}{9}(3x^2+3xo+o^2)$

이제 $B\beta$를 무한히 작게 하면, $v=y$이고 o이 있는 항은 사라지므로

$2zy=\frac{4}{3}x^2$, $z=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$이므로 $y=x^{\frac{1}{2}}$을 얻을 수 있다(Kang, 2019, p. 532 재인용)[7].

위의 인용문에 이어서, Newton은 역으로 $y=x^{\frac{1}{2}}$로부터 $z=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$을 유도할 수 있음을 밝힌 후, 마찬가지로 $z=(\frac{n}{m+n})ax^{\frac{m+n}{n}}$와 $y=a^{\frac{m}{n}}$ 사이의 전환을 보였다. 즉, 곡선 아래의 면적 z와 곡선의 높이 y 사이를 오가는 일반적인 대수적 방법을 제시했던 것이다.

한편, 이러한 Newton의 방법에는 이미 전제되고 있는 사항이 있다: 그것은 ‘넓이의 순간변화율이 y좌표이다.’인데, Newton은 이를 기초로 해서 y를 의도적으로 구하는 모습을 보여주고 있다고 할 수 있다. 다시 말해, Newton은 일명 미적분학의 기본정리에 해당하는 내용을 이미 자명하게 간주한 상태에서, y를 구하는 방법에 대해 논의를 전개하고 있는 것이다.

이 맥락과 관련해, Kang(2019)은 “Newton은 넓이의 증분에 주목하였기 때문에 미적분학의 기본정리를 통찰할 수 있었던 것으로 보인다(Ibid, p. 532).”고 말하며, 이 Newton의 방법 안에 넓이 증분에 주목했다는 증거가 들어있을 뿐만 아니라 미적분학의 기본정리가 성립할 수밖에 없는 아이디어도 녹아들어 있다고 주장한다.

Kang은 Newton이 넓이증분에 주목했다는 것에 대한 근거로 세 가지 사항을 제시하는데, 그 내용은 다음과 같다.

첫째, Newton은 넓이증분과 넓이의 변화율을 분리해서 다루는데, 이는 그가 넓이증분을 하나의 독자적 대상으로 바라봄을 보여준다.

둘째, Newton은 증명을 하면서 보조그림에서 사각형 $BKH\beta$를 (중심에 위치시켜) 두드러지도록 나타내는데, 이는 그가 넓이증분에 주목했음을 보여준다.

셋째, Newton은 넓이증분을 ov로 간결하게 표현함으로써 그것을 쉽게 대상화하였다.

그리고 이러한 세 가지 근거에 비추어, Kang은 Newton이 ‘넓이증분 직관’에 의해 (이전에)[8] ‘넓이의 순간변화율이 y좌표이다.’라고 통찰했을 것이라는 그의 가장 핵심적인 주장을 다음과 같이 제기하였다.

> 넓이의 증분에 주목한 관점은 미적분학의 기본정리를 당연한 것으로 이해 가능하게 한다. ‘아주 작은 넓이의 증분=아주 작은 사각형=아주 작은 x의 증분×$f(x)$’인데, 이는

7) 여기서 재인용된 글과 그림은 Whiteside(1964)에 따른 것이다.
8) Kang(2019)는 이와 같이 언급한 적은 없지만, 연구의 전체 맥락을 고려할 때, 그 논지는 “Newton의 방법에서 넓이증분에 주목했던 것과 그 방식을 고려하면, Newton이 비슷한 방식으로 그 이전에 미적분학의 기본정리를 정당화했을 것이라 추측할 수 있다.”라 하겠다.

$S(x+o)-S(x)=of(x)$이므로 미적분학의 기본 정리는 직관적으로 자명해진다. 사실 Newton은 넓이의 증분을 '$BKH\beta=ov$'라고 표현했는데, $B\beta$를 무한히 작게 하면 $v=y$'이라는 점에서 '넓이의 증분$=oy$'로 미적분학의 기본정리를 이해한 것으로 보인다(Ibid, p. 533-4).

이 주장을 요약하면, Newton에게 있어 '넓이증분$=ov$'일 때 $(z+ov)-z=ov\approx oy$가 유도되므로 미적분학의 기본정리가 자명해질 수밖에 없는데, 그 자명함을 느끼는 과정에서 중요한 역할을 하는 것이 '넓이증분$=ov$'에 주목하는 것이라 말할 수 있다.

하지만 이러한 일련의 주장을 대체적으로 인정한다고 하더라도 연구자에게 여전히 강한 의문이 제기되는 사항이 있다 : 정말로, Newton이 (평균)변화율 v보다 넓이증분 ov에 더 주목했는가?

사실, 이러한 의문은 '넓이증분 ov와 넓이의 (평균)변화율 v가 서로 독립적으로 존재[9]한다기보다는 서로 유기적으로 결합된 것이 아니냐?'는 것이다. 구체적으로, v는 o의 함수이기에 o에 따라 v와 ov는 동시에 변할 수밖에 없는 존재인데, 인식론적으로 볼 때는 오히려 v의 존재를 먼저 고려해야만 그에 따라 ov를 생각할 수 있는 것 아닌지 또는 v와 ov는 동시에 그 존재를 생각해내야 하는 것 아닌지 등의 의문이 자연스럽게 제기된다고 하겠다.

한편, 이러한 의문을 다음과 같이 세 가지로 상세화 할 수 있을 것이다.

(1) Newton은 v를 왜 그리고 어떻게 생각한 것일까?

(2) Newton의 방법에서 v의 역할은 무엇인가?

(3) Newton은 o가 한없이 작아진다고 할 때 ov가 oy가 한없이 가까이 간다고 생각했을까? 아니면, 그 때 v가 y에 한없이 가까이 간다고 생각했을까?

사실, 이러한 의문은 Newton이 ov보다는 오히려 v에 주목했을 것이라는 연구자의 수학사적 판단에 따른 것이다. 연구자가 이렇게 생각한 이유는, 서론에서 살펴보았듯이, Newton의 이론이 집약된 프린키피아에서의 언급을 고려할 때 시간증분 o이 한없이 작아진다고 할 때 시간증분 o와 넓이증분 ov가 각각 어떤 궁극적인 양이 되는 것이 아니라 o와 ov의 비율($o : ov=1:v$)의 값이 궁극적인 양 y가 되는 것이라는 해석이 가능하고, 다시 이러한 해석은 "Newton이 주목했던 것은 넓이증분 ov가 아니라 넓이의 변화율 v이다."라는 시사점을 낳기 때문이다.

하지만 이러한 문제제기는 Newton의 후기연구 특성에 기초한 것일 수 있다. 그러기에, 이제 Newton의 미적분학 초기 및 중기 연구에서 그 주인공이 넓이증분 ov인지 아니면 넓이의 증가속도 v인지의 여부에 대해 고찰하기로 하자.

III. Newton은 ov와 v 중에서 무엇에 더 주목했는가?

Newton의 방법에 대한 탐색을 진행하기에 앞서 우리가 유념해야 하는 사항을 다시 짚어볼 필요가 있다. 그것은, Newton은 미적분학의 기본정리에 해당하는 내용을 이미 당연시하고서 자신의 방법을 사용하고 있다는 것이다. 이와 관련해, Boyer(1949)는 Newton의 초기연구에서 그의

9) 다음 절에서 자세히 다루겠지만 v는 평균속도, 즉 평균변화율에 해당한다.

방법이 사용될 때 가정된 것에 대해 다음과 같이 말한다.

> 그의 증명에서 우리는 그의 마음속에 있는 생각에 대해 약간의 힌트를 엿볼 수 있다. 세로좌표 y는 증가하는 면적의 속도를 나타내는 것처럼 보이고, 가로좌표는 시간을 나타낸다. 세로좌표를 밑변의 작은 구간으로 곱하면 면적의 작은 부분을 얻을 것이고, 곡선 아래의 전체 면적은 단지 이 모든 면적의 모멘트의 합이다(Kang, 2019, p. 534 재인용).

물론, ‘세로좌표 y를 증가하는 면적의 (순간) 속도로 간주하는 것’은 미적분학의 기본정리를 이미 사용하는 모습을 보여준다. 그러기에, 이번 절에서 출발하는 위치와 탐색하려는 것을 순차적으로 진술하면 다음과 같다.

- Newton의 방법에 이미 미적분학의 기본정리가 성립함이 가정되어 있을 뿐 아니라 사용되고 있다.
- Newton의 방법이 적용되는 과정 속에서 반대로 미적분학의 기본정리가 자명하게 여겨질 만한 측면이 들어있다.
- 만약 Newton이 자신의 방법을 사용하면서도 미적분학의 기본정리가 성립할 수밖에 없는 이유를 파악했다면, 그것은 Newton이 v 에 주목한 덕분일까? 아니면 ov에 주목한 덕분일까?

여기서, 바로 앞서의 Boyer의 의견을 Kang(2019)의 연구에서 재인용한 이유부터 우선 말하고 관련 논의를 진행할 필요가 있을 듯하다. 왜냐하면 Kang은 이 Boyer의 의견이 ‘Newton의 방법에서 넓이증분이 주목되었다.’는 주장을 뒷받침하여 그 신빙성을 높이는 것이라 주장했기 때문이다.

> Newton이 무한소의 시간 o와 면적의 증가속도 y의 곱 oy라는 넓이의 증분에 주목하였을 것이라는 추측으로, 본 연구의 견해와 일치하는 것으로 생각된다(Ibid, p. 534 재인용).

하지만 이 맥락에서 Boyer는 ‘Newton의 방법에서 넓이의 변화율보다 넓이증분이 더 주목되었다.’고 말한 것처럼 보이지는 않는다. 오히려, 그는 다만 ‘Newton의 방법에서 넓이증분의 합이 주목되지는 않았다.’는 의견을 말했을 뿐이다. 이와 관련해, Boyer(1949)는 앞서의 인용문에 곧이어 다음과 같이 말한다.

> 이것은 정확히 오레스미, 갈리레오, 데카르트, 그리고 다른 사람들이 낙하물체에 대한 법칙을 증명하는 데에 사용한 무한소 개념인데, 단지 다른[10] 것은 그들이 면적을 그러한 요소들의 합을 통하여 전체로서 구한 반면에, 뉴턴은 면적을 한 점에서의 변화율로부터 구했다는 것이다(Ibid, p. 222).

사실, Boyer가 ‘Newton의 방법에서 넓이증분과 그 변화율 중 어떤 것이 더 주목되었는가?’와 관련해 그가 어떤 것에 우선순위를 두었는지는 분명하지 않다고 하겠다.

단지, Boyer는 Newton의 방법에서 핵심은 ‘넓이의 순간증가’가 이루어 질 때 ‘한 점에서 넓이의 (순간)변화율’을 결정하는 것이라고 다음과 같이 언급할 뿐이다.

> 대신에, 이 식($z=(\frac{n}{m+n})ax^{\frac{m+n}{n}}$)은 다루는 있는 점에서 면적의 순간증가(momentary increase)를 생각함으로써 얻어졌다. 다른 말로 하면, 이전의 구적법은 합의 극한으로 정의되는 정적분과 대등한 방법으로 구해졌으나, 뉴턴은 여기서

10) 번역서에는 ‘틀린’으로 오역되어 있어, 수정하여 제시하였다.

> 우선 면적의 변화율(rate of change of area)을 구하고, 이것으로부터 세로좌표(y)를 나타내는, 우리가 이제는 함수[11]의 부정적분이라고 불러야 하는 것에 의해 면적자체를 구하였다. 더욱이, 우리는 이 명제에서 기본이 된 과정이 변화율을 결정하는 것임(the determination of rates of change)에 주목하게 된다(Ibid, p. 220)[12].

어떻게 보면, 이 Boyer의 의견은 Newton의 방법에서, Kang의 주장과는 상반되게, '넓이증분' 보다는 '넓이 변화율'이 더 주목되고 강조되었다는 것으로 해석될 여지도 있다. 하지만 어떤 미적분학사 권위자의 견해에 대한 주관적 해석에 의해 Newton의 방법에서 v 와 ov 중 어떤 것이 더 주목되었는지를 판단해버리는 것은 여기서 경계해야 할 일이다. 그러기에, 이제 앞 절에서 제시한 세 가지 의문을 중심으로, Newton의 방법의 특성에 대해 살펴보면서, 이제 Newton이 v 와 ov 중 어떤 것에 더 주목했는지에 대해 비판적으로 고찰하도록 하자.

먼저, Newton의 방법에서 수행한 활동 자체가 무엇이가를 생각해보자. 그것은 어떤 곡선아래의 넓이($z=(\frac{n}{m+n})ax^{\frac{m+n}{n}}$)가 주어진 상황에서 그 곡선의 세로좌표($y$)를 찾는 활동과 그것의 역-활동이라 할 수 있다. 물론, 전자를 해결하면 후자는 자동적으로 해결된다.

이와 관련해, Newton은 결국 무엇을 보여주고자 한 것일까? 그것은, $z=(\frac{n}{m+n})ax^{\frac{m+n}{n}}$ 로부터 y를 찾는 해법이 어떤 한 점에서 $z=(\frac{n}{m+n})ax^{\frac{m+n}{n}}$ 의 변화율을 찾는 해법과 동일하다는 것이다. 즉, z 로부터 y 를 찾아가는 과정이 어떤 한 점에서 z 의 순간변화율을 구하는 과정과 동일하다는 것이다.

요컨대, Newton의 방법이란 'z (면적)로부터 y (곡선)를 구하는 법'과 'y 로부터 z 를 찾는 법'인데, Newton은 각각의 해결방법이 순간변화율을 구하는 것과 그 결과를 되돌리는 것에 해당함을 보여주었던 것이다.

기본적으로, Newton의 방법은 일종의 방정식을 해결하는 문제해결법에 해당한다. 그런데 $z=(\frac{n}{m+n})ax^{\frac{m+n}{n}}$ 가 주어졌을 때 y를 찾는 과정을 전체적으로 조망하게 되면, 무엇보다 y로 예상되는 값 또는 y에 한없이 가까이 갈 수 있는 값을 찾는 활동부터 우선적으로 이루어짐을 알 수 있다. 즉, y의 예비 후보자인 v 부터 찾는 활동이 이루어진다고 할 수 있다.

구체적으로, 앞 절에서 살펴본 Newton의 방법의 예시의 첫 부분인 "면적 $BD\delta\beta=$면적 $BKH\beta=ov$를 만족하도록 면적 $ABD=z$, 길이 $BD=y$, 길이 $AB=x$, $B\beta=o$, $BK=v$라 두면"은 y의 후보자를 찾는 활동에 해당하는 것이다.

이것은 v 가 나타난 이유와 그 역할을 한꺼번에 설명해준다. v 는 y에 대한 임시적인 답으로 제시된 것이다. 그렇다면, 그 v 를 어떻게 찾는 것일까?

---

11) 원문에는 'the function representing the ordinate'로 되어있는데, '세로좌표를 나타내는'이 '부정적분'이 아니라 '함수'를 수식한다는 것을 살리기 위해, '세로좌표' 표현에 '(y)' 표현을 덧붙였다.

12) 여기서, Boyer가 말하는 '변화율의 결정'은 좁은 의미로 '순간변화율을 결정하는 것'을 의미하지만, 이 연구에서의 분석을 통해, 넓은 의미로 '평균변화율을 우선 찾고 그것을 통해 순간변화율을 결정하는 것'임이 드러난다고 하겠다.

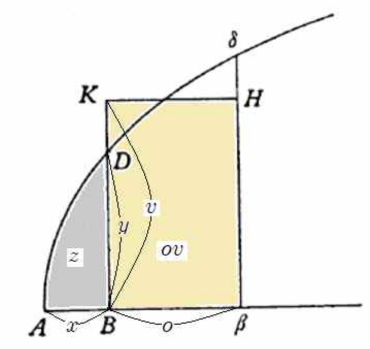

***Figure* 2.** Reconstruction of Newton's Approach 2

v를 찾는 방식은, 시간의 (아주 작은) 증분 o가 생겨서 넓이의 증분 $BD\delta\beta$가 나타날 때, 증분 $BD\delta\beta = ov$가 되도록 하는 v로 결정하는 것이다(*Figure* 2). 그러면, 그런 v를 항상 찾을 수 있다는 것을 어떻게 보장할 수 있을까?

Newton은 암묵적으로 v의 존재성을 이미 가정하고 있다는 점에서, 이 가정은 일종의 원초적인 직관에 의한 것으로 판단된다. 구체적으로, 증분 $BD\delta\beta$와 비교하여 그 밑변을 공유하는 직사각형 중에서 ‘그 넓이가 증분 $BD\delta\beta$ 와 같은’ 직사각형이 반드시 존재할 것임을 자명하게 여기는 것이다. 그리고 이것은 $BD\delta\beta$에서 밑변 $B\beta$의 각 위치에서의 높이의 평균인 ‘평균높이 v’의 존재성을 무의식적으로 인정하는 것이라 할 수 있다.

사실, 오늘날의 함수적 관점에서 보면 ‘적분의 평균값 정리’를 인정할 때에야 v의 존재성을 명시적으로 보장할 수 있다. v의 존재는 $\int_{x}^{x+o} f(t)dt = f(x+\epsilon o) \cdot o$ 만족하는 ϵ (단, $0<\epsilon<1$)의 존재와 그에 따른 $f(x+\epsilon o)$의 존재에 의해 보장받는데, 여기서 $f(x+\epsilon o)$가 바로 v인 것이다.

그러기에, Newton은 기하적인 차원에서 적분의 평균값 정리를 무의식적으로 사용하면서 v의 존재를 자명하다고 여겼던 것으로 보인다.

여기서, Newton의 방법에서 우선적으로 찾았던 것이 vo가 아니라 v라는 것이 명백하게 드러난다. 그리고 v가 짧은 o 동안 넓이의 평균변화율이란 사실도 선명하게 나타난다. 다시 말해, 증분 o : 증분 $BD\delta\beta$ 의 값이 v인 것이다.

Newton은 자신의 방법에서 (자명하게 존재하는 것으로 간주된) v를 매개체로 하여 y를 어떻게 구했던 것일까? 예상할 수 있듯이, 증분 o를 한없이 작아지게 할 때 v가 가까이 가는 값으로 그것을 구했다고 할 수 있다. 앞서 밝힌 것처럼, 오늘날의 관점으로 볼 때 v는 x와 o의 함수 $v(x,o)=f(x+\epsilon o)$이기에, $\lim_{o\to 0} v(x,o)$ 을 통해 y를 구하고자 했다고 볼 수 있는 것이다.

물론, 이것은 평균변화율의 극한, 즉 넓이의 순간변화율을 구하는 것에 해당한다[13]. 그리고 “$B\beta$를 무한히 작게 하면, $v=y$이고 o이 있는 항은 사라지므로 $2zy=\frac{4}{3}x^2$, $z=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$이므로 $y=x^{\frac{1}{2}}$을 얻을 수 있다(Kang, 2019, p.532 재인용).”은 이러한 특징을 매우 명확하게 보여준다.

구체적으로, ‘$B\beta$를 무한히 작게 하면 $v=y$이고 (중략) $y=x^{\frac{1}{2}}$’와 같은 언급의 흐름은 Newton이 o가 한없이 작아질 때 v에 주목하면서, 그 때의 v가 y에 한없이 가까이 간다는 것을 바탕으로 하여, 그 때의 v을 통해 y을 구했음을 드러내는 것이다.

13) Newton이 극한이나 도함수 개념을 가지고 있었다는 의미가 아니며, 현대적 관점에서는 그렇게 볼 수 있다는 것이다.

여기서 Newton은, 곡선이 매끄럽게 연결되어 있다고 간주하면서, $B\beta(=o)$가 한없이 작아진다고 할 때 $\beta\delta$가 $BD(=y)$에 한없이 가까워지므로 v도 $BD(=y)$에 한없이 가까워질 수밖에 여겼던 것으로 보인다(*Figure* 2). 단적으로 말해, Newton의 방법에서 핵심은 '평균변화율 v을 우선 찾고 그것을 매개로 하여 순간변화율 y을 결정하는 것'이라 하겠다.

이상의 Newton의 초기연구 단계와 관련된 논의에 비추어 본다면, Newton은 o가 한없이 작아진다고 할 때 ov에 주목하고서 그 ov가 oy에 한없이 가까이 가는 것으로 간주했던 것 같지는 않다.

미묘한 차이지만, Newton은 자신의 초기연구 과정에서 v에 주목하고서 그 v가 y에 한없이 가까이 간다고 생각했을 것으로 판단된다. 즉, Newton은 ov가 아니라 v에 주목했던 것이다.

다음으로, Newton의 방법이 유율법의 형태로 변모했던 'Newton의 연구중기 단계'에서는 넓이증분과 넓이의 평균변화율 중에서 어떤 것이 더 주목되고 중요한 역할을 했다고 평가할 수 있을까?

이와 관련해, Kang(2019)은 Newton이 유율법을 사용하는 것에 대해 언급하면서 넓이증분 oy가 여전히 주목되었고 그러한 맥락에서 미적분학의 기본정리는 자명하게 밝혀진다고 다음과 같이 말한다.

> Newton은 유율의 비 $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$를 계산하는 과정에서 $\dot{x}o$, $\dot{y}o$와 같은 표현을 주로 사용하였는데, 이는 순간변화량을 의미한다. 이처럼 Newton은 순간변화량을 '변화속도×무한소의 시간'으로 파악하고 있는데, 이 관점에서 보면 넓이의 증분인 oy에서 y는 면적의 증가속도라는 것이 자명해진다(Ibid p. 534).

하지만 Newton이 유율법을 제안하면서 가졌던 그의 의도와 한계의식에 비추어 보면, Newton이 넓이증분을 중요시했고 그것에 주목했다는 주장은 수용하기가 다소 힘들다. 왜냐하면 Newton이 유율법을 제시하면서 $\dot{x}o$, $\dot{y}o$와 같은 표현을 사용했던 것은 분명한 사실이지만 그러한 표현 자체가 개념적으로 모순이 있는 무한소를 나타내는 것이기에 그는 $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ 등이 하나의 단독적인 대상으로 또는 어떤 개별적인 대상으로 간주되는 것을 원하지 않았기 때문에, 그러한 표현의 등장에도 불구하고 이렇게 판단하는 것이다 (Baron,1987; Bell,2006; Edwards,1979; Jung,2010; Katz,1993).

다시 말해, Newton은 유율법을 사용하면서 무한히 작은 양(일명, 무한소)을 개별적으로 다루지 않으면서 o가 한없이 작아질 때 두 유율 사이의 비[14]을 구하는 모습을 보여주고자 하는 의도를 가졌던 것이다. 그는 oy, ov 등의 표현을 사용하긴 했지만 그 각각을 어떤 하나의 독립적 대상으로 간주하지 않으면서 'o가 한없이 작아질 때의 $\frac{\dot{z}}{\dot{x}}$'인 y를 구하는 모습을 보여주고자 했던 것이다.

이런 면을 고려할 때, Newton이 유율법을 다루면서 개별적인 넓이증분 자체에 주목했다고 판단하기에는 다소간 힘들다고 하겠다.

앞서 다루었던 Newton 방법의 사례에 유율법을 접목시킨 모습을 살펴보면서, 이러한 유율법의 숨겨진 의도에 대해 더 고찰해보자.

14) 후기 연구단계에서는 궁극적 비라 지칭한다.

곡선 $z=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 에 대하여 x는 $x+\dot{x}o$으로, $z=z+\dot{z}o$로 치환하여 다음 식을 얻는다.

$$(z+\dot{z}o)^2=\frac{4}{9}(x+\dot{x}o)^3$$

$$z^2+2z\dot{z}o+\dot{z}^2o^2=\frac{4}{9}(x^3+3x^2\dot{x}o+3x\dot{x}^2o^2+\dot{z}^3o^3)$$

o이 없는 항 z^2과 $\frac{4}{9}x^3$은 같으므로 제거하고 양변에 o를 나누면

$$2z\dot{z}+\dot{z}^2o=\frac{4}{3}x^2\dot{x}+\frac{4}{3}x\dot{x}^2o+\frac{4}{9}\dot{z}^3o^2$$

이제 $B\beta$를 무한히 작게 하면, $\frac{\dot{z}}{\dot{x}}=y$ 이고 o이 있는 항은 사라지므로

$$2zy=\frac{4}{3}x^2$$

$z=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$이므로 $y=x^{\frac{1}{2}}$을 얻을 수 있다.

이와 같이 유율법을 적용시켰을 때의 모습을 보면, o가 어떤 유한한 양일 때의 $\frac{\dot{z}}{\dot{x}}$는[15] 평균변화율 v이고 o가 한없이 작아질 때의 $\frac{\dot{z}}{\dot{x}}$는 순간변화율 y임을 알 수 있다. 이것은 Newton이 유율법을 다룰 때에 평균변화율 v를 통해 순간변화율 y를 구했다는 것을 나타낸다고 하겠다.

하지만 Newton은 유율법을 통해 자신의 의도가 충분히 실현되고 있지 않음을 자각하고 있었다. 이러한 Newton의 의도와 한계의식에 대해, Boyer(1949)는 다음과 같이 말한다.

> 뉴턴 자신은 여기서 극한 개념에 대해 어떤 필요성을 느꼈던 것 같다. 왜냐하면 그는 유율이 결코 단독으로 다루어지는 것이 아니라 항상 비율로 다루어진다고 지적하였기 때문이다. 후에, 뉴턴은 무한히 작은 것에 사로잡힌 것으로부터 빠져나오려고 했을 때, 이 사실을 훨씬 더 강하게 강조하였다(Ibid, p. 225).

지금까지 우리는 Newton의 연구 초기 및 중기 단계에서 사용된 z로부터 y를 구하는 방법의 특징에 대해 살펴보면서, ov와 v 중에서 어떤 것이 더 주목되었는지에 대해 고찰하였다.

그 분석결과를 정리하면 다음과 같다고 하겠다 : Newton은 z로부터 출발해 넓이증분 $BD\delta\beta$을 만들었을 때, $BD\delta\beta=ov$을 만족하는 '평균높이인 v'를 찾고, 그 v을 가지고 o가 한없이 작아질 때의 y를 결정했다. 그러기에, Newton의 방법 속에서 가장 주목되는 대상은 오히려 v라 할 수 있다.

IV. 의견 차이가 발생하는 이유

앞서의 분석결과는, Newton의 방법과 관련해 연구자와 Kang(2019) 사이에 ov와 v의 각 역할 및 그 중요성에 대한 견해의 차이가 나타난다는 것을 보여준다. 그 이유는 무엇일까? 연구자는 그것이 '차원의 구분'에 대한 입장의 차이에 근간했을 것이라 판단한다.

Kang은 'Newton이 차원의 구분을 명확히 하면서 자신의 방법을 사용하였다.'는 것을 전제로 하여 '차원의 구분에 기초해, Newton이 넓이증분 ov에 주목하여 미적분학의 기본정리를 도출했을 것이다.'는 추측을 제기하였다.

반면에, 연구자는 이와 정반대의 입장을 가지

15) $B\beta$ $(=o)$를 무한히 작게 하기 이전에 식 $2z\dot{z}+\dot{z}^2o=\frac{4}{3}x^2\dot{x}+\frac{4}{3}x\dot{x}^2o+\frac{4}{9}\dot{z}^3o^2$ 에서 구한 비율 $\dot{x}:\dot{z}$ 의 값을 가리킨다.

고 있다. 즉, 'Newton이 차원의 구분을 의식적으로 없애면서 자신의 방법을 사용하였다.'는 관점을 가지고 있다.

우선, Kang의 Newton의 차원 구분에 대한 입장을 살펴보기로 하자. 이와 관련해, 그는 다음과 같이 말한다.

> 길이와 넓이를 차원적으로 엄격하게 구분한 Newton의 태도 역시 넓이 증분의 관점과 결합되어 ... (중략) ... 이러한 태도 때문에 그는 넓이의 증분을 ov로 표현하였으며, 이로 인해 '넓이의 증분$=ov$'라는 직관적 이해에 도달하였을 것이다. 만약 차원에 따른 엄격한 구분이 없었다면 '넓이의 증분$=o$'가 되어 미적분학의 기본정리에 대한 직관적 이해가 쉽지 않았을 것으로 생각된다(Ibid, p. 534).

하지만 연구자는 Newton이 모든 종류의 양을 길이화하는 해석기하학의 정신을 가지고서 길이, 넓이, 부피 사이를 개념적으로 구분할 뿐 실제로는 길이값, 넓이값, 부피값을 함께 다룰 수 있는 대상으로 간주하였다고 생각한다. 왜냐하면 데카르트, 페르마 등이 도입한 해석기하학의 핵심 아이디어는 차원을 엄격하게 구분하는 '동차성의 원리'를 없애는 것으로 볼 수 있기 때문이다. 그 차원이 다르더라도, 어떤 구체적인 양이나 값으로 볼 수 있는 것들을 함께 다룰 수 있는 것이 바로 해석기하학의 정신인 것이다.

구체적으로 1차식 x, 2차식 x^2, 3차식 x^3 등은 모두 길이로 간주하게 되면 $x+x^2+x^3$, $\frac{x+2x^2-x^3+3}{x^2}$에서와 같이 그것들을 함께 다룰 수 있는 것이다. 이 같은 해석기하적 관점에서 보면, z, x, y, o, v, ov 등은 모두 길이로 간주할 수 있다.

그러면, Newton은 x와 o는 1차원의 양이고 z와 ov는 2차원의 양이므로 서로 분리해서 동-종류끼리 다루어야 한다는 '동차성의 원리'를 철저하게 지켰던 것일까? 아니면, 그는 해석기하학의 정신에 입각해서 그 '동차성의 원리'를 극복하는 자유를 누렸던 것일까?

이에 대해, Kang은 'Newton이 동차성의 원리를 유지하는 태도를 견지했다.'는 것에 가까운 의견을 다음과 같이 피력한다.

> Newton은 $x+o$처럼 $z+o$라고 표현하지 않았는데, 이는 1차원인 선의 길이 x와 2차원인 면의 넓이 z를 분명하게 구분하는 태도를 보여준다(Ibid, p. 534).

하지만 Newton은 시간의 증분이 o라고 설정하고서 그에 대응한 v를 찾고 넓이의 증분을 vo로 표현했을 뿐이다. 해석기하학적 관점을 수용했던 Newton에게 있어 z와 vo는 모두 길이로 간주될 수 있는 것이다.

앞서 다루었던 Newton의 방법의 예에서 다루었던 식을 보면 이러한 특징이 잘 드러난다. 등식 $z=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 은 차원 구분의 관점에서는 2차원과 $\frac{3}{2}$차원을 같다고 한 것이다. 복잡한 $z^2+2zo+o^2v^2=\frac{4}{9}(x^3+3x^2o+3xo^2+o^3)$ 와 같은 식에서는 4차원(z^2, o^2v^2)과 3차원(zo, x^3, x^2o, o^3) 등이 혼재되어 등식을 이루고 있다.

이것은, Newton이 차원을 엄격하게 구분했던 것이 아니라 오히려 그러한 구분을 의식적으로 없애면서 모든 종류의 양[16]을 길이로 다루고 있

16) 1.5차원 및 4차원의 양과 같은 가상의 양 뿐 아니라 양과 양 사이의 비율의 값도 길이로 취급한다고 할 수 있다.

다는 것을 보여준다고 하겠다.

V. 결론 및 교육적 시사점: Newton의 '평균높이' 직관

이 연구의 분석 대상인 'Kang(2019)의 연구'의 핵심적 주장은 다음과 같다고 할 수 있을 것이다.

> Newton은 넓이의 증분에 주목하여 이를 간결한 형태의 2차원의 식으로 표현하였기 때문에 미적분학의 기본정리에 대하여 '넓이의 증분= $f(x)o$'라는 직관을 형성할 수 있었던 것으로 보인다. 이러한 직관을 바탕으로 Newton은 미적분학의 기본정리를 간파하여, 그간 합의 극한으로만 다루어지던 구적법을 함수의 부정적분을 이용하여 구할 수 있게 되었다(Ibid, p. 534-5)

Kang은 <차원의 구분에 기초해서, 길이 증분 o 과 구분되는 넓이증분 vo 에 주목하면서 이 넓이증분이 $f(x)o(=yo)$에 한없이 가까이 감을 알게 되는 것>을 '넓이증분' 직관이라 간주하고서, Newton이 이 직관에 의해 미적분학의 기본정리의 통찰에 이르렀을 것이라 추측한 것이다.

하지만 이 연구의 분석에서 드러나듯, Newton은 그의 방법에서 차원의 구분을 없애려는 해석기하학의 정신에 기초해서 평균변화율 v 에 주목하고 z 로부터 y 를 구하는 모습을 보여주고 있다.

그러기에, Kang의 주장을 있는 그대로 인정하기는 쉽지 않은 듯하다. 즉, '넓이증분' 직관이 미적분학 기본정리의 발명과정에서 큰 역할을 했다는 주장을 액면 그대로 수용하기는 어렵다.

그런데 Kang의 '넓이증분 vo 에 주목했다.'는 주장을 '넓이증분 $BD\delta\beta$을 넓이증분 vo 으로 바꾸고자 했다.' 또는 '곡선과 직선으로 둘러싸인 면적을 직사각형 면적으로 바꾸고자 했다.'는 주장으로 완곡하게 해석하게 되면, Kang의 연구와 이 연구는 상당부분 일치점을 찾을 수 있다. 왜냐하면 넓이증분 $BD\delta\beta$을 넓이증분 vo 으로 바꾸는 것은 넓이증분과 v 의 존재성을 동시에 다루는 활동이기 때문이다.

이처럼 Newton의 방법에서 '넓이증분 $BD\delta\beta$ 을 넓이증분 vo 으로 바꾸고자 했다(*Figure* 2).'는 관점을 인정한다고 할 때, Kang의 연구와 이 연구의 분석결과는 도대체 어떤 직관이 Newton의 미적분학의 기본정리에 대한 발명과정에 영향을 미쳤다고 공통적으로 말할 수 있을까? 만약 미적분학의 기본정리에 대한 통찰을 하는 데에 기여한 'Newton의 직관'이 존재한다면 그것은 무엇일까?

연구자는 '넓이증분 $BD\delta\beta$을 넓이증분 vo 으로 바꿀 때'에 무의식적으로 사용된 직관 자체가 그것이라고 생각한다. Ⅲ절에서 잠시 언급했던 것처럼, 이 직관은 기하적인 차원에서 '평균높이의 존재를 암묵적으로 인정하는 직관'이라 할 수 있다.

구체적으로, Newton은 자신의 방법을 소개하면서 $BD\delta\beta$의 밑변을 $B\beta$라 할 때, 그 밑면 각 위치에서의 높이의 평균인 '평균높이 v'의 존재성을 무의식적으로 인정했다고 할 수 있다 : 면적 $BD\delta\beta = ov$을 만족하도록 하는 $v(=KB=H\beta = \frac{BD\delta\beta}{o})$가 존재함을 가정하였다(*Figure* 2).

한편, 이 직관은 미적분학의 기본정리의 전신인 'Barrow의 정리'의 증명에서도 사용되고 있고 있다는 점에서, '평균높이' 직관은 미적분학의 기본정리의 발생과 밀접하게 관련되었다는 것을 알 수 있다.

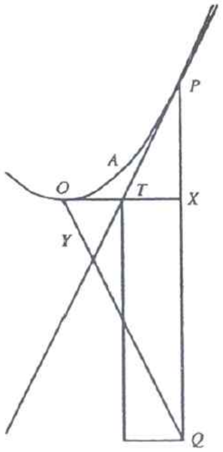

***Figure* 3.** Barrow's Theorem

Barrow 정리
곡선 A는 곡선 Y, x축, 선분 XQ에 의해 둘러싸인 평면의 넓이와 같은 길이의 선분 XP를 높이로 갖는다[17]. 이때, $TX\times XQ$와 XP의 값이 같도록 x축 위의 점 T를 잡으면, 직선 TP는 곡선 A의 점 P에서의 접선이 된다(Park, 2013, pp. 87-88 재인용).

이 Barrow의 정리를 진술할 때, Barrow는 $TX\times XQ = XP$을 만족하는 TX가 존재한다는 것을 이미 가정하고 있다. 곡선 Y, x축, 선분 XQ에 의해 둘러싸인 도형인 $OYQX$와 관련해 이 도형의 넓이(값)가 XP라 할 때, 그 넓이가 같은 '밑변이 XQ인 직사각형의 존재' 또는 곡선 Y와 관련해 그 밑면 XQ의 각 위치에서의 (가로방향) 높이의 평균인 '평균높이 TX'의 존재성을 무의식적으로 인정한다고 할 수 있다.

어떻게 보면, 이 연구의 초점은 Newton 방법의 특성을 수학사적으로 규명하는 데에 맞추어져 있긴 하다. 하지만 이 연구가 Kang(2019)의 교육연구에 대한 반박과 보완이라는 목적을 지녔고 그가 '넓이 증분' 직관에 기초해 미적분학의 기본정리의 교수-학습을 논의했던 사항을 고려할 때, 이 연구에서 제기한 '평균높이' 직관을 바탕으로 하여 미적분학의 기본정리를 지도하는 것에 대해서도 간단히 다룰 필요가 있을 듯하다.

우선, Kang은 자신의 역사발생 분석에 근거해 넓이증분 및 그에 대한 직관을 적극적으로 활용하는 '미적분학의 기본정리의 교수-학습'을 다음과 같이 제안한 바 있다.

구체적으로 (미적분학의 기본정리를 다루면서) $\dfrac{\Delta F}{\Delta x}=?$에서 생각하는 것을 $\Delta F=?\Delta x$으로 바꾸어 생각하게 하는 것이다. 이 힌트만으로 충분하지 못할 경우 2차 힌트로 좌변의 의미를 생각하게 한다. 다시 말해, $\Delta F=?\Delta x$을 '찰나의 넓이 변화$=?\Delta x$'으로 바꾸어 생각하게 하는 것이다(Ibid, p. 543).

그렇다면, 이러한 '넓이증분'을 직접 이용하는 접근방식과 대비해서, 이 연구에서 도출했던 '평균높이' 직관을 미적분학의 기본정리에 대한 교수-학습에 접목시키면 어떤 모습을 띤다고 할 수 있을까?

아마도, '평균높이' 직관을 중등 및 대학 미적분학 교육에 가장 직접적으로 적용하는 방식은, 다음과 같이, 미적분학의 기본정리의 증명과정에서 평균높이로서의 함숫값의 존재를 암묵적으로 인정하는 방식이라 할 수 있을 것이다.

17) Barrow가 해석기학학의 대수적 방식을 온전하게 수용한 것은 아니지만, 이 부분에서만큼은 넓이를 길이로 간주하는 모습을 아주 선명하게 보여준다. 즉, 그가 동차성의 원리를 극복한 모습을 보여준다고 하겠다.

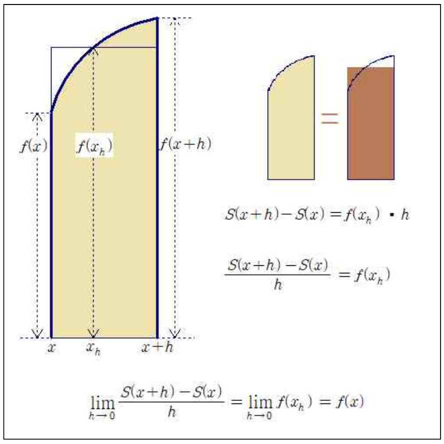

***Figure* 4.** Average Height Intuition

우리의 목표는 $S(x)$의 도함수가 $f(x)$가 된다는 것을 설명하는 것이다. 즉, h가 0에 한없이 가까이 갈 때 평균변화율인 $\frac{S(x+h)-S(x)}{h}$ 이 $f(x)$에 한없이 가까이 가는지의 여부에 관심을 기울인다.

여기서, 넓이증분을 '같은 밑변을 가진 직사각형'으로 바꿀 수 있는지 생각하자. 그러면, '넓이증분= 직사각형'을 만족하는 어떤 높이를 항상 찾을 수 있다. 식으로 나타내면, $S(x+h)-S(x)=f(x_h)\cdot h$인 관계를 나타내게 되는데 그런 x_h가 x와 $x+h$ 사이에 있다고 하겠다.

이때, $\frac{S(x+h)-S(x)}{h}=f(x_h)$이 성립한다.

$\lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h}=\lim_{h\to 0}f(x_h)$도 성립한다.

함수f는 연속이므로 $\lim_{h\to 0}f(x_h)=f(x)$이 성립한다. 정리하면,

$\lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h}=\lim_{h\to 0}f(x_h)=f(x)$이 성립한다. 따라서 $S'(x)=f(x)$이다 (*Figure* 4).

그런데 이러한 접근방식은, 그 의도가 평균높이의 존재성을 암묵적으로 인정하는 방식, 즉 일종의 '기하적 직관'을 단순하게 이용하는 것임에도 불구하고 x_h와 함숫값 $f(x_h)$의 존재를 언급할 때 '적분의 평균값 정리'에 해당하는 내용을 대수적으로 진술하게 되는 난점이 개입된다.

충분히 예상할 수 있듯, 연속함수의 최대-최소 정리를 이용하는 방식에 비해 그리 직관적이지 않다는 의견과 함께, 적분의 평균값 정리를 미리 다루게 됨으로써 기존의 미적분 교수-학습 계열이 결국 통째로 헝클어지게 된다는 비판이 얼마든지 제기될 수 있다.

연구자 역시도 이러한 접근방식이 기존의 방식에 비해 더 쉽다고는 말할 수 없다고 생각한다. 또한, 만약 현재의 미적분 교수-학습 계열 내에서 명시적으로 적분의 평균값 정리에 해당하는 내용을 먼저 다루게 되면, 적분을 먼저 다루어야 하는 계열 상의 문제가 발생할 소지가 있다고 생각한다.

다만, 이러한 접근방식은 어떤 구간 $[x, x+h]$에서의 평균변화율 $\frac{S(x+h)-S(x)}{h}$을 함수값 $f(x_h)$ 자체로 표현할 수 있는 특징이 있다. 그러기에, 이 방식은 $f(x_h)$이 $f(x)$에 가까이 가는 과정을 직접적으로 나타내면서, 평균변화율 $\frac{S(x+h)-S(x)}{h}$의 극한이 $f(x)$가 된다는 것을 직관적으로 이해시키는 데에 도움이 될 수 있다고 생각한다(*Figure* 4).

물론, 이러한 예측은 순전히 이론적 논의에 불과하기 때문에, 추후 체계적으로 잘 설계된 교수-학습 방안을 가지고서 여러 차례 교수실험을 진행하고 학생의 이해가 변해가는 것에 대해 고찰하면서 그 접근방식의 교육적 효용 및 가치 등에 대해 연구할 필요가 있을 것이다.

한편, 이 연구가 Kang(2019)의 연구에 대한 반박과 보완을 시도했듯이, 이에 대한 재반박 또는 추가적인 보완을 시도하는 다양한 연구가 이루

어짐으로써 미적분 교육의 기초가 더 튼튼해지기를 기대한다.

참고문헌

Baron, M. E. (1987). *The origins of the infinitesimal calculus*. New York: Dover.

Bell, J. L. (2006). *The Continuous, the Discrete and the Infinitesimal in Philosophy and Mathematics*. Milano: Polimetrica.

Boyer, C. B. (1949). *The history of the calculus and its conceptual development*. New York: Dover Publications.
김경화 역(2008). **미분적분학사-그 개념의 발달**. 서울: 경문사.

Boyer, C. B., Merzbach, U. C. (1961). *A history of mathematics*. New York: John Wiley & Sons.
양영오, 조윤동 역(2000). **수학의 역사 · 하**. 서울: 경문사.

Cohen, I. B. (1999). *A Guide to Newton's Principia*. California: University of California Press.

Edwards, C. H. (1979). *The historical development of the calculus*. New York: Springer-Verlag.
류희찬 역(2012). **미적분의 역사**. 서울: 교우사.

Jung, Y. (2010). *A didactical analysis on the fundamental theorem of calculus*. Unpublished doctoral dissertation, Seoul National University.
정연준(2010). **미적분의 기본정리에 대한 교수학적 분석**. 서울대학교 박사학위논문.

Kang, J. (2019). Exploring Newton and Leibniz's Intuition and Heuristic Pedagogy on the Fundamental Theorem of Calculus. *Journal of Educational Research in Mathematics, 29*(4), 525-549.
강정기(2019). 미적분학 기본정리에 대한 Newton과 Leibniz의 직관 및 발견적 교수법 탐색. **수학교육학연구, 29**(4), 525-549.

Katz, J. (1993). *A history of mathematics*. Harper Collins College Publishers.

Newton, I. (1687). *The Principia : mathematical principles of natural philosophy*.
이무현 역(1998). **프린키피아 제1권**. 서울: 교우사.

Park, S. (2013). A historical analysis of Barrow's theorem and its educational implication. *The Korean Journal for History of Mathematics, 26*(1), 85-101.
박선용(2013). Barrow 정리의 수학사적 분석과 그에 따른 교육적 시사점에 대한 연구. **한국수학사학회지, 26**(1), 85-101.

Whiteside, D. (1964). *The mathematical works of Isaac Newton, Vol. I~II*. New York: Johnson Reprint Cooperation.